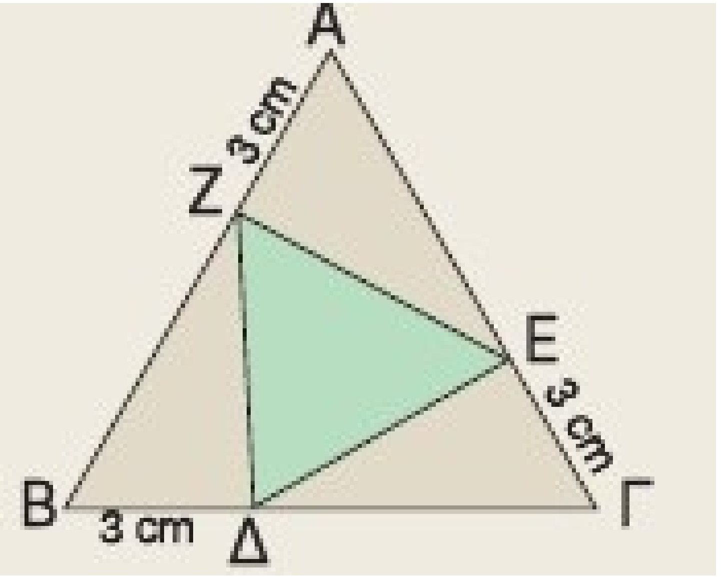
Ελένη Λυμπεροπούλου

Σχολική σύμβουλος Μαθηματικών

Γ΄Αθήνας

Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΣ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



Από τον οδηγό του Πιλοτικά εφαρμοζόμενου προγράμματος σπουδών:

- Η απόδειξη είναι θεμελιώδες συστατικό των Μαθηματικών και έχει μοναδικά χαρακτηριστικά. Έτσι, η μύηση των μαθητών στην έννοια και τις διαδικασίες της απόδειξης πρέπει να αποτελεί μακροπρόθεσμο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Σε αυτή την πορεία, πρέπει να αναδεικνύεται η ανάγκη ύπαρξης της απόδειξης ως τεκμηρίωση μια εικασίας, δηλαδή πρέπει να έχει προηγηθεί η διερεύνηση και η διατύπωση εικασιών.

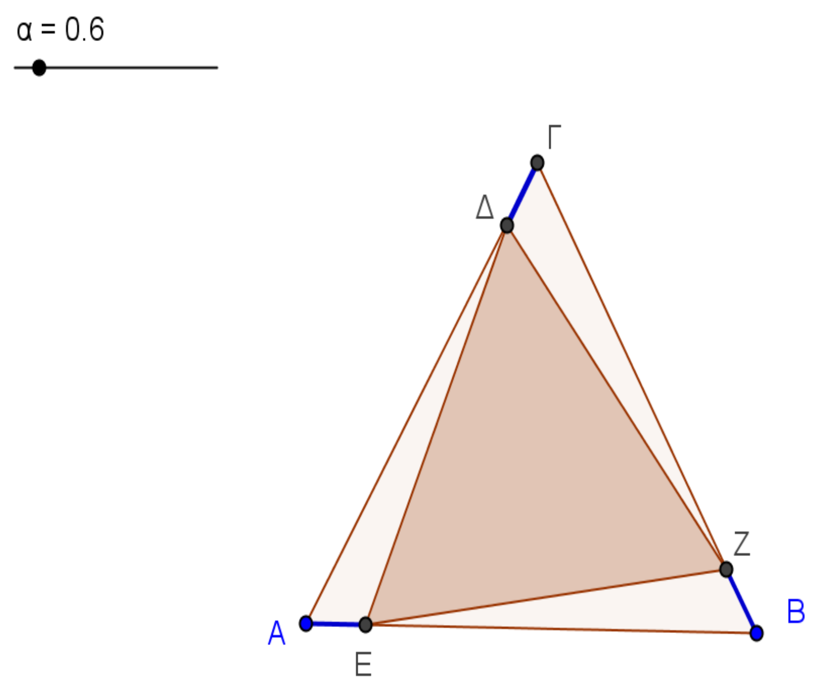
Διερευνηση στο ισοπλευρο τριγωνο.

Στις πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ορίσει τα ίσα τμήμα ΓΔ, ΑΕ και ΒΖ. Το μήκος τους καθορίζεται από τον δρομέα α.

Μπορείτε να ερευνήσετε τι διατηρείται σταθερό στο σχήμα όταν μεταβάλλετε τον δρομέα ή τις κορυφές Α και Β του τριγώνου;

Μπορείτε να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας;

☐ Οδηγίες



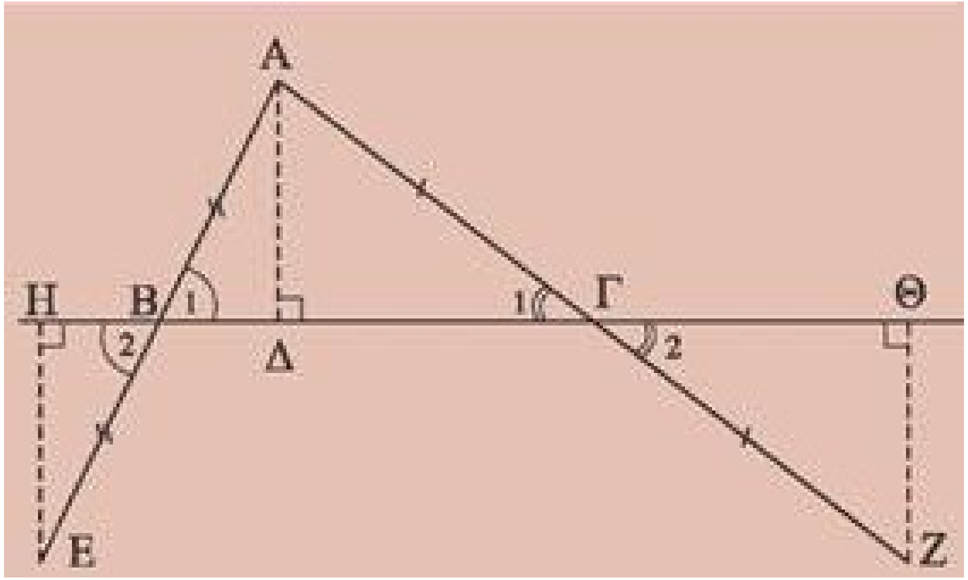
Επιπλέον, απόδειξη δεν είναι μόνο η τυπική απόδειξη σαν αυτές που θα συναντήσει ο μαθητής στο Λύκειο. Η έννοια της απόδειξης ως τεκμηρίωση ξεκινά με τη γενίκευση των παρατηρήσεων, τη διατύπωση επιχειρημάτων, την άρθρωσή τους σε ενιαίο συλλογισμό. Ο μαθητής δεν μπορεί παρά να περάσει από όλα αυτά τα επίπεδα μέχρι να αρχίσει να κατανοεί και να μπορεί να διατυπώνει πιο τυπικές αποδείξεις. Αλλιώς, θα αντιμετωπίζει τις μαθηματικές αποδείξεις ως κάποια ιεροτελεστία χωρίς νόημα για τον ίδιο.

Στο νέο ΠΣ δίνεται έμφαση στις μαθηματικές διεργασίες, η ανάπτυξη των οποίων επιδιώκεται μέσα από τη δραστηριότητα των μαθητών. Μία από αυτές είναι ο μαθηματικός συλλογισμός που εμπεριέχει την επιχειρηματολογία και (όπου είναι δυνατόν) την απόδειξη. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να ενθαρρύνει τη διατύπωση επιχειρημάτων από τους μαθητές και την κριτική εξέτασή τους από τους υπόλοιπους μαθητές, να επιλέγει τις ερωτήσεις που θα κάνουν τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με θέματα που ως τότε θεωρούσαν προφανή. Έτσι, όχι μόνο δεν "χάνεται" η μαθηματική απόδειξη, αλλά προετοιμάζεται το έδαφος για την καλύτερη κατανόηση του ρόλου και του περιεχομένου της.

Στο κεφάλαιο Τρίγωνα (ισότητα τριγώνων)

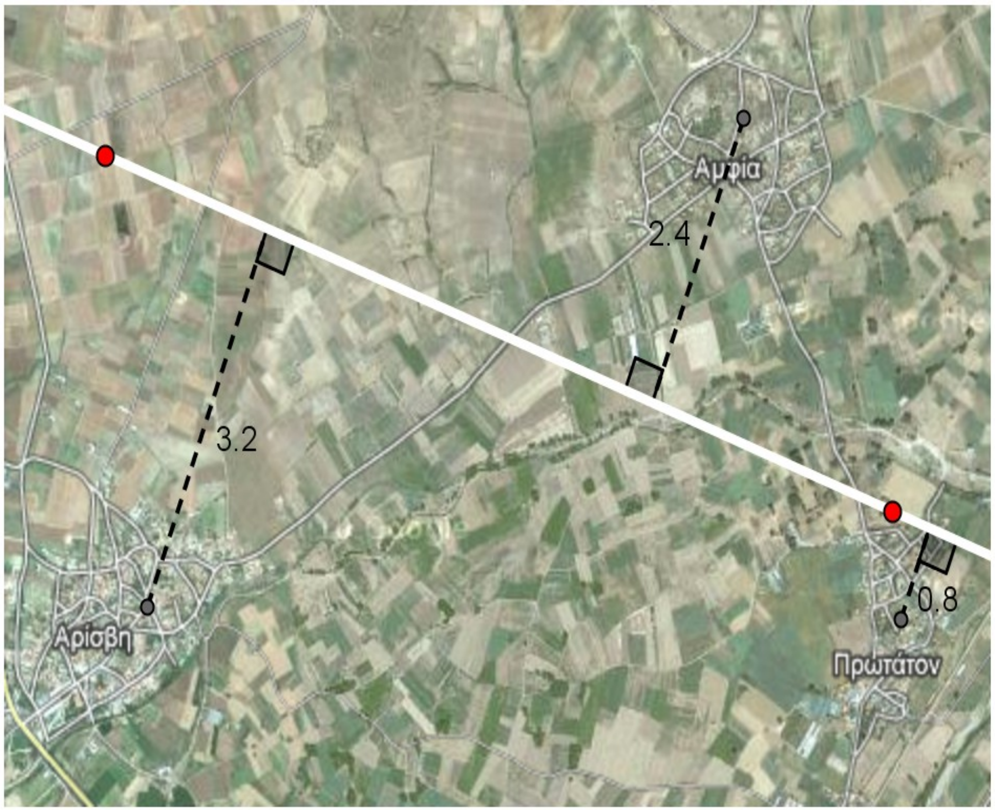
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ (σχ.31) παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε:
(i) να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ,

(ii) να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.



Freudenthal, H.: 1968, "Why to teach mathematics so as to be useful?", *Educational Studies in Mathematics*

- *Αυτό που πρέπει να μάθουν οι άνθρωποι δεν είναι τα μαθηματικά ως κλειστό σύστημα, αλλά μάλλον ως δραστηριότητα, τη διαδικασία μαθηματικοποίησης της πραγματικότητας και, αν είναι δυνατόν, ακόμη και την μαθηματικοποίηση των μαθηματικών*.



Ένας μηχανικός θέλει να σχεδιάσει έναν δρόμο που να απέχει εξίσου από τα τρία χωριά.

Με τη βοήθεια των εικονιδίων που έχετε στη διάθεσή σας πάνω αριστερά, μετακινήστε κατάλληλα τα κόκκινα σημεία, ώστε να βοηθήσετε το μηχανικό.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορείτε να χαράξετε;

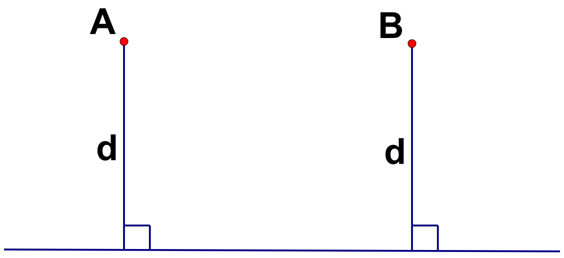
☐ Βοήθεια

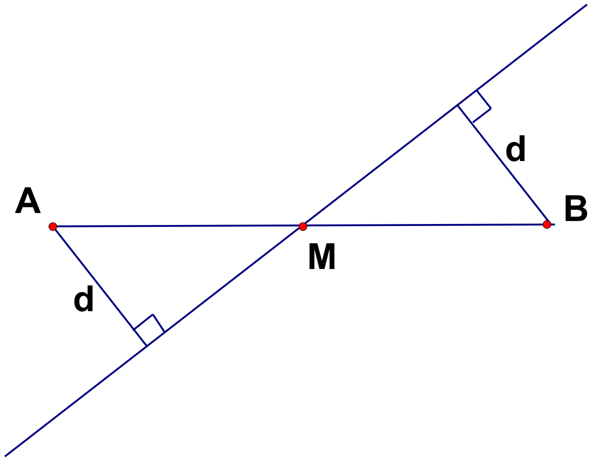
Στο κεφάλαιο Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια (Εφαρμογές στα τρίγωνα):

10. *Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;*

Η προτεινόμενη λύση

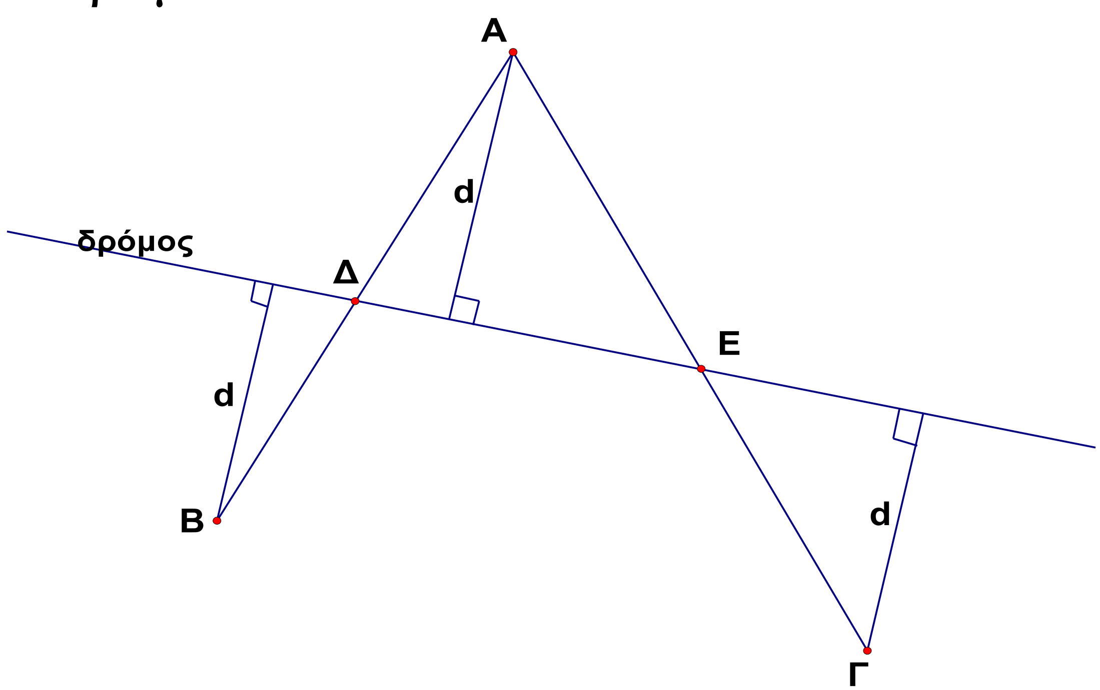
- Παρατήρηση:
- Δύο σημεία Α και Β ισαπέχουν: i) Από κάθε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ ii) Από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του ΑΒ.

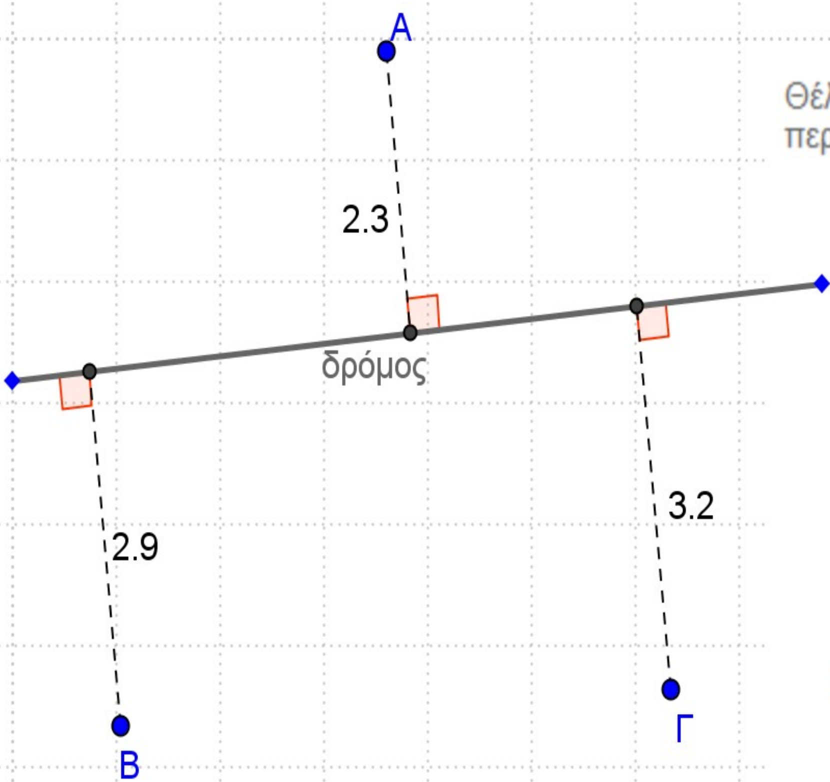




Η προτεινόμενη λύση (συνέχεια)

- Έστω Α,Β και Γ τα τρία χωριά. Σύμφωνα με την παρατήρηση ο δρόμος πρέπει να συνδέει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Προφανώς υπάρχουν τρεις τέτοιοι δρόμοι.





☐ Τρίγωνο ΑΒΓ

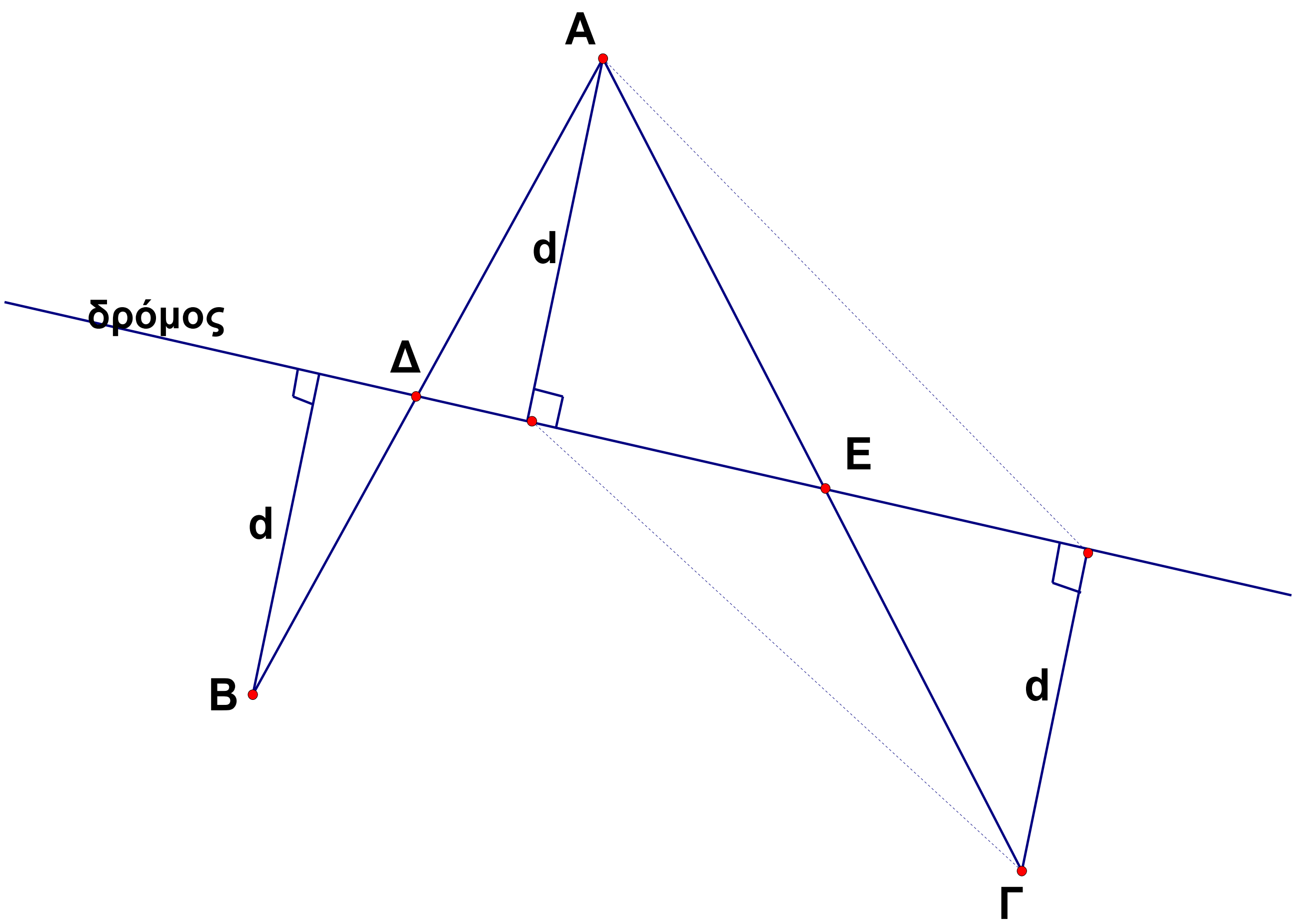
Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δρόμο που να ισαπέχει από τις περιοχές Α, Β και Γ.

1. Μετακινώντας τις περιοχές Α, Β και Γ να βρείτε την κατάλληλη θέση ώστε οι αποστάσεις τους από το δρόμο να είναι ίσες.
2. Στη συνέχεια εμφανίστε το τρίγωνο ΑΒΓ και προσπαθήστε να ανακαλύψετε την ιδιαίτερη θέση του δρόμου.
3. Αλλάξτε τις θέσεις των περιοχών Α, Β και Γ και μεταβάλλετε το δρόμο ώστε οι αποστάσεις των περιοχών αυτών να είναι ίσες.
4. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το **«πού πρέπει να χαραχτεί ο δρόμος»**; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας και να δώσετε το πλήθος των δυνατών λύσεων.

Σχόλιο 1

- Το ίδιο σχήμα (ίδια δομή) παρουσιάζεται λυμένο στο κεφάλαιο περί ισότητας ορθογωνίων τριγώνων ως εφαρμογή.
- Το ίδιο σχήμα (ίδια δομή) παρουσιάζεται στο κεφάλαιο Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια ως άσκηση στις εφαρμογές στα τρίγωνα. Η προτεινόμενη λύση χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου ή τις εφαρμογές τους στο τρίγωνο;
- Το «πλαίσιο» αλλάζει τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος;

Μια πρόταση για λύση



Σχόλιο 2

- Πίσω απ’ όλες τις προσεγγίσεις κρύβεται η «παλιά» καλή μέθοδος της ανάλυσης-σύνθεσης: το ψηφιακό δόμημα (και στις δύο μορφές του), αλλά και η λύση «στο χαρτί» ξεκινούν από το «λυμένο» πρόβλημα για να «κτίσουν» την απόδειξη….

Πρόβλημα

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία που δεν είναι περιεχόμενη στις πλευρές τους ίση, υπάρχει περίπτωση να είναι ίσα;

EXEMPLIFICATION IN THE MATHEMATICS CLASSROOM: WHAT IS IT LIKE AND WHAT DOES IT IMPLY?
Iris Zodik and Orit Zaslavfsky, CERME 5 (2007)

- Σε ένα μάθημα γεωμετρίας σχετικά με το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, οι μαθητές ερωτήθηκαν αν δύο συγκεκριμένα τρίγωνα είναι ίσα, σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ.
- Το παράδειγμα που χρησιμοποίησε η δασκάλα στην τάξη προερχόταν από το σχολικό εγχειρίδιο:

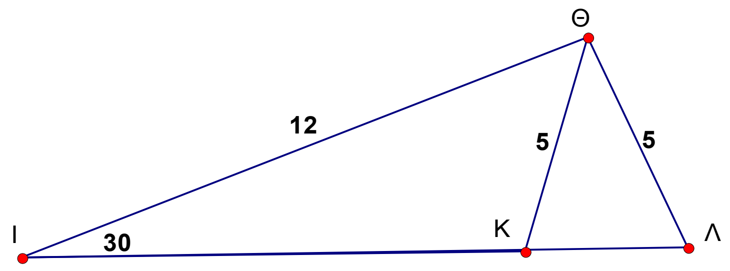
Δασκάλα: Είναι ίσα σύμφωνα με το ΠΓΠ;

Μαθητής: Δεν υπάρχει ΠΓΠ ούτε στο ένα ούτε στο άλλο.

Δασκάλα: Είναι όμως ίσα ή όχι;

Μαθητής: Ναι, είναι.

Δασκάλα: Μπορώ όμως να σας δώσω ένα αντιπαράδειγμα και να σας δείξω ότι δεν είναι ίσα. Πράγματι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός αντιπαραδειγμάτων.

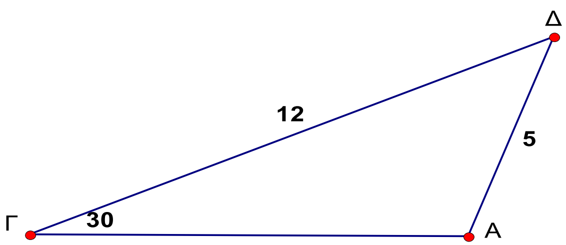


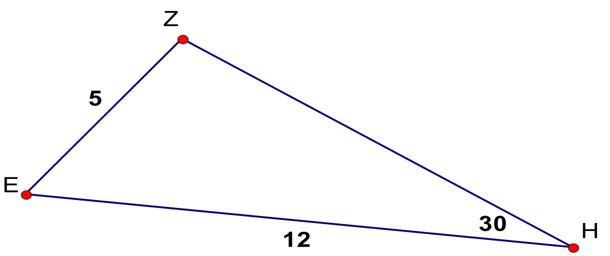
- Η Δασκάλα έκανε το παραπάνω σχήμα, **όμως** την στιγμή που το σχεδίαζε, προσδοκώντας να έχει πολλά δυνατά τρίγωνα, παρατήρησε ότι υπάρχει ακριβώς μόνο ένα παραπάνω….
- Δασκάλα: Έχω έναν άπειρο αριθμό τριγώνων. Περιμένετε, όχι, δεν έχω - ,έχω μόνον δύο που είναι ίσα.

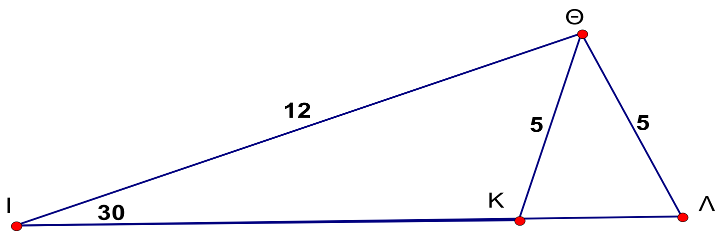
EXEMPLIFICATION IN THE MATHEMATICS CLASSROOM: WHAT IS IT LIKE AND WHAT DOES IT IMPLY?

Iris Zodik and Orit Zaslavfsky, CERME 5 (2007)

- Όμως…….







Το πρόβλημα που τίθεται:
Πότε, παρ᾽ όλα αυτά, ισχύει η ισότητα των τριγώνων, ανοίγει τον ορίζοντα της τυφλής εφαρμογής κανόνων, σε εικασίες και παρατηρήσεις, καθώς και σε συμπεράσματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή στην εμβάθυνση της έννοιας και την καλύτερη κατανόηση της ισότητας δύο τριγώνων αλλά και δύο επιπέδων σχημάτων γενικότερα.

Φύλλο εργασίας

Πρόβλημα

Αν δυο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία που δεν είναι περιεχόμενη στις πλευρές τους ίση, υπάρχει περίπτωση να είναι ίσα;

1) Ανοίξτε το αρχείο " πλευρές και γωνία.gsp" και παρατηρείστε τα σχήματα.

i)Τι σχέση έχουν οι γωνίες Α και Κ;

ii) Με τι ισούται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

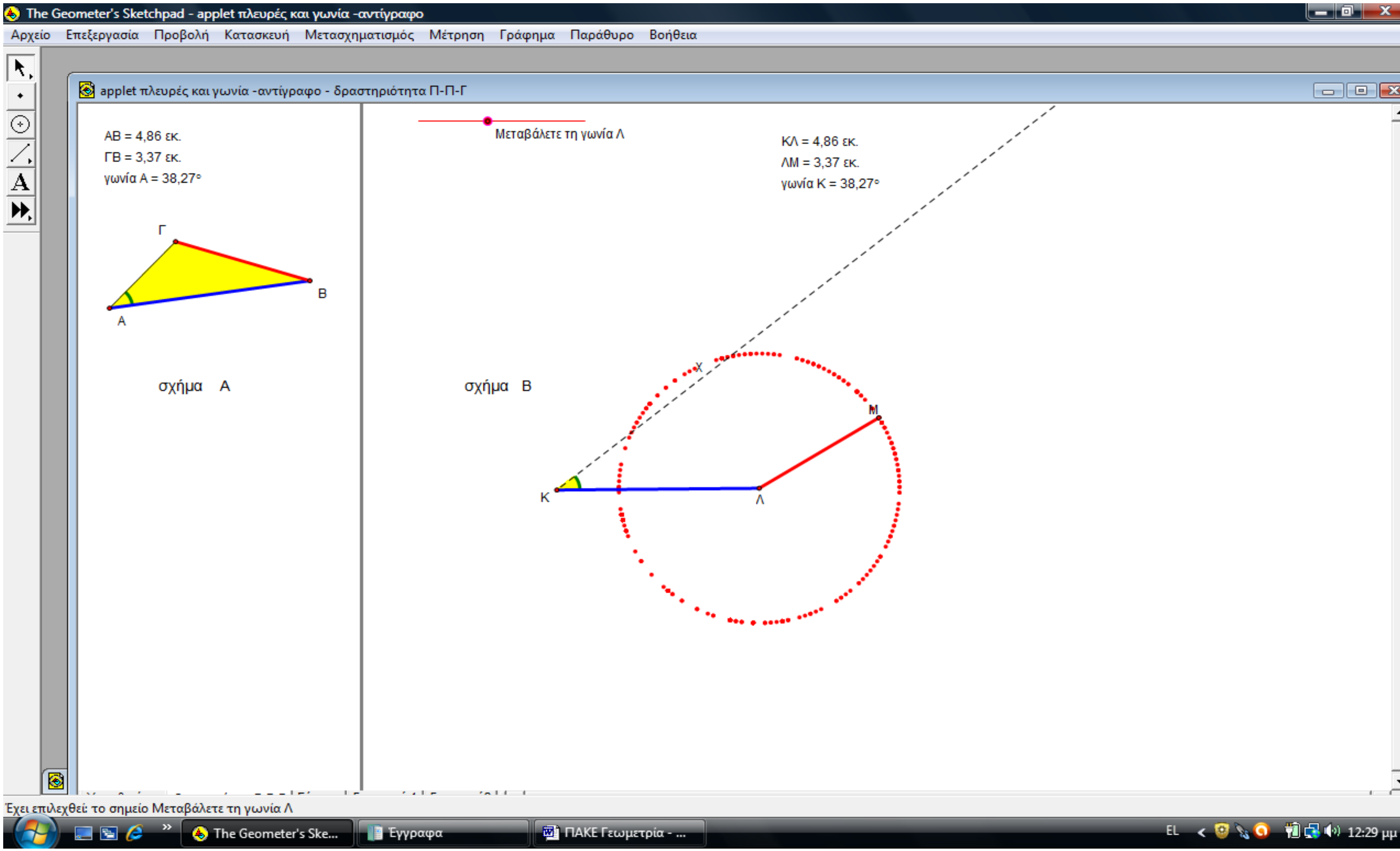
iii) Με τι ισούται το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ;

2) Αλλάξτε το μέγεθος της γωνίας Λ με τη βοήθεια του μεταβολέα (σχήμα Β). Προσπαθήστε να σχηματίσετε τρίγωνο χρησιμοποιώντας τη διακεκομμένη γραμμή ως τρίτη πλευρά.

a. Πόσα τρίγωνα νομίζετε ότι μπορείτε να σχηματίσετε; ……

b. Δώστε ίχνος στο σημείο Μ (δεξί κλικ και εντολή "σχεδίαση ίχνους") και μετακινείστε το μεταβολέα. Βρείτε τρόπο να κατασκευάστε τα τρίγωνα που σχηματίζονται και να τα ονομάσετε.

c. Μετρήστε τις γωνίες των δύο τριγώνων που έχετε φτιάξει


The Geometer's Sketchpad - applet πλευρές και γωνία -αντίγραφο
Αρχείο Επεξεργασία Προβολή Κατασκευή Μετασχηματισμός Μέτρηση Γράφημα Παράθυρο Βοήθεια
applet πλευρές και γωνία -αντίγραφο - δραστηριότητα Π-Π-Γ
AB = 4,86 εκ.
ΓΒ = 3,37 εκ.
γωνία Α = 38,27°
Γ
Β
Α
σχήμα Α
Μεταβάλετε τη γωνία Λ
ΚΛ = 4,86 εκ.
ΛΜ = 3,37 εκ.
γωνία Κ = 38,27°
σχήμα Β
Μ
Κ
Λ
Έχει επιλεχθεί το σημείο Μεταβάλετε τη γωνία Λ
The Geometer's Ske...
Έγγραφα
ΠΑΚΕ Γεωμετρία - ...
EL
12:29 μμ

3) Είναι κάποιο από τα τρίγωνα που φτιάξατε ίσο με το τρίγωνο ΑΒΓ;

4) Μετακινείστε τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ. Ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα σας;

5) Μήπως οι προηγούμενες παρατηρήσεις σας, σας βοηθούν να απαντήσετε στο πρόβλημα του φύλλου εργασίας;

Ένα πρόβλημα

- «**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Σ. Κατασκευάζουμε διαδοχικά το Σ΄ συμμετρικό του Σ ως προς Α, το Σ΄΄ συμμετρικό του Σ΄ ως προς Β, το Σ΄΄΄ συμμετρικό του Σ΄΄ ως προς Γ και το μέσο Μ του ΣΣ΄΄΄. Δείξτε ότι το Μ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Σ**».

ΘΕΩΡΗΜΑ

- Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες μία προς μία δύο πλευρές τους και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών, τότε έχουν τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το άλλο ζεύγος των ίσων πλευρών ή ίσες ή παραπληρωματικές.

Από το βιβλίο Θεωρητική Γεωμετρία, Α΄Λυκείου,

Δ. Παπαμιχαήλ- Α. Σκιαδά, 1982

Πρόταση Σ. Νομικού για το πρόβλημα με τα συμμετρικά σημεία

- Σε ένα επίπεδο χώρο διεξάγεται το παιχνίδι του «ΚΡΥΜΜΕΝΟΥ ΘΗΣΑΥΡΟΥ». Οι διοργανωτές έχουν τοποθετήσει τρείς κώνους στις θέσεις Α, Β και Γ. Κάθε παίχτης ξεκινάει από οποιαδήποτε θέση του χώρου θέλει, κατευθυνόμενος ευθύγραμμα προς τον κώνο Α και, αφού τον φτάσει, εξακολουθεί να κινείται ευθύγραμμα γία ίσο διάστημα με αυτό που διήνυσε μέχρι να τον φτάσει, σταματώντας στο σημείο Σ. Στη συνέχεια κατευθύνεται ευθύγραμμα προς τον κώνο Β και αφού τον φτάσει και αυτόν εξακολουθεί να κινείται κινείται ευθύγραμμα για απόσταση ΒΣ΄ = ΒΣ. Από το σημείο Σ΄ αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα προς το σημείο Γ και εξακολουθεί να κινείται για απόσταση ΓΣ’’ = ΓΣ΄. Τέλος από τη θέση Σ’’ κινείται ευθύγραμμα, φτάνοντας στην αρχική του θέση. Οι διοργανωτές διαβεβαιώνουν τους συμμετέχοντες ότι απ’ όποια θέση και αν ξεκινήσουν, θα περάσουν από το σημείο που είναι κρυμμένος ο θησαυρός. Μπορείτε να βρείτε αν λένε αλήθεια οι διοργανωτές καθώς και το σημείο που είναι κρυμμένος ο θησαυρός; Τι θα πρέπει να αλλάξουν οι διοργανωτές, ώστε στο επόμενο παιχνίδι, να μην είναι κρυμμένος ο θησαυρος στο ίδιο σημείο;

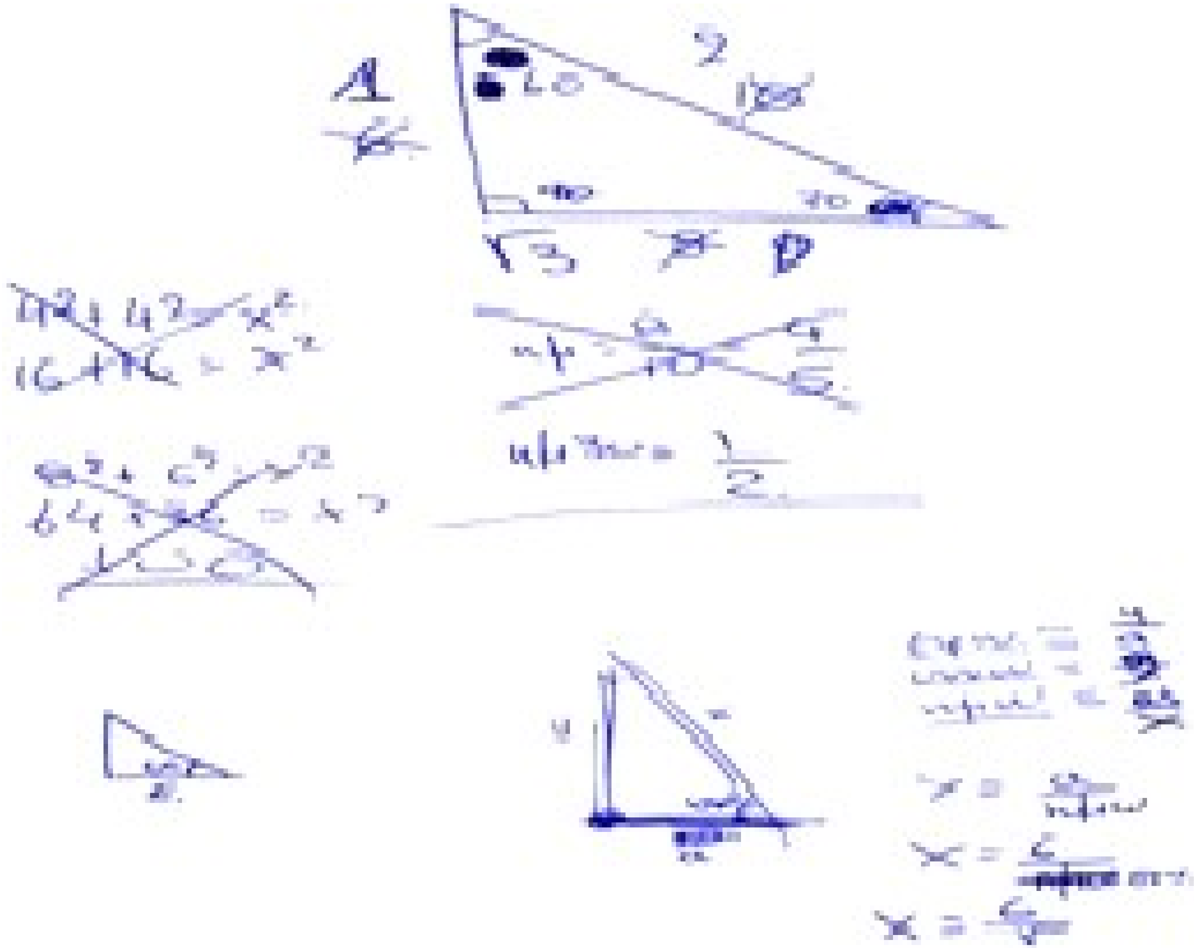
Χελωνόκοσμος

- Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών εννοιών με τον χελωνόκοσμο συνεπάγεται μια άλλη οπτική ή προσέγγισή τους σε σχέση με την παραδοσιακή διδασκαλία. *Μια μεγάλη διαφορά ανάμεσα στη γεωμετρία της χελώνας και την καρτεσιανή γεωμετρία συνίσταται στην έννοια των ενδογενών (intrinsic) ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων. Μια ενδογενής ιδιότητα είναι αυτή που εξαρτάται μόνο από το συγκεκριμένο σχήμα και όχι από την σχέση του σχήματος με ένα σύστημα αναφοράς.* (Harold Abelson and Andrea diSessa, 1980)

Η διαμεσολάβηση του ψηφιακού μέσου

- Η γεωμετρία της χελώνας χρησιμοποιώντας πολύ φτωχά μέσα (το προχώρημα προς τα εμπρός ή προς τα πίσω και την αλλαγή κατεύθυνσης) «χτίζει» το σχήμα, δεν το θεωρεί δεδομένο, και μπορεί να το μεταβάλλει τροποποιώντας τον κώδικα ή παίζοντας με τους μεταβολείς. Η συνήθης κατασκευή (με κανόνα και διαβήτη ή όχι) μετατρέπεται σε μία ελεγχόμενη κίνηση της χελώνας, την πλοήγησή της πάνω στο επίπεδο και τα σχήματα που προκύπτουν είναι εν δυνάμει παραμορφώσιμα.

Το πρόχειρο των μαθητών



Να κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο

- Πρώτη προσπάθεια:
- Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές 10 βήματα η κάθε μία. Τίθεται θέμα, μετά την πρώτη προσπάθεια σύνταξης κώδικα, για το μέτρο της γωνίας – η στροφή 45^0 ανοίγει το τρίγωνο- παίρνουμε την παραπληρωματική 180-45=135. Με την χρήση μεταβολέων «κλείνουν» το τρίγωνο αλλά δεν είναι σίγουροι γι αυτό: αν κρύψουμε την χελώνα το τρίγωνο δεν κλείνει ή κλείνει παραπάνω από ότι πρέπει. Υπολογισμός της υποτείνουσας με το Πυθαγόρειο: οι πλευρές που προκύπτουν είναι 10,10 ,$10\sqrt{2}$.
- «Να αλλάξουμε τις πλευρές ώστε να είναι ρητός, τότε θα είναι εύκολο».