Βελτίωση της αποδεικτικής ικανότητας των μαθητών Σε προτάσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας

Εμμανουήλ Νικολουδάκης[1], Γεώργιος Δημάκος[2]

[1]Διδάκτωρ Διδακτικής Μαθηματικών Δ/ντής 7^{ου} ΓΕΛ Περιστερίου

[2]Αναπληρωτής Καθηγητής Π. Τ. Δ. Ε. Πανεπιστήμιο Αθήνας

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε το θεωρητικό πλαίσιο μιας εν εξελίξει έρευνας, που αφορά την εισαγωγή μη έμπειρων μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Γι αυτό χρειάστηκε να αναλύσουμε την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης στα «δομικά» της στοιχεία, τα οποία μας οδήγησαν να προτείνουμε ένα διαβαθμισμένο τρόπο διδασκαλίας της απόδειξης για μαθητές της Α΄ τάξεως του Λυκείου, δηλ. μαθητές που αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά την Ευκλείδεια Γεωμετρία σε θεωρητικό επίπεδο.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Απόδειξη, Ευκλείδεια Γεωμετρία, διαβαθμισμένη διδασκαλία της απόδειξης, van Hiele*

1. Εισαγωγή

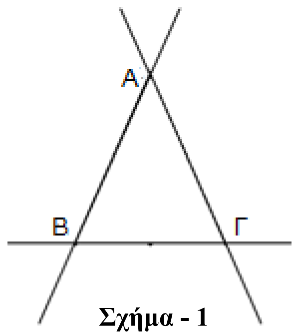
Αν και η απόδειξη αποτελεί το πιο ενδιαφέρον εργαλείο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, θεωρείται κεντρική για την επιστήμη γενικά των μαθηματικών και έχει καθοριστική σημασία για τη μαθηματική δραστηριότητα (Davis & Hersh, 1981) η αποτυχία της διδασκαλίας της απόδειξης εμφανίζεται να αποτελεί σχεδόν διεθνές φαινόμενο (Balacheff, 1988). Στην Ελλάδα ιδιαίτερη δυσκολία στην απόδειξη παρουσιάζουν οι μαθητές της Α΄ τάξεως του Λυκείου (Θωμαΐδης & Πούλος, 2000), οι οποίοι εισάγονται για πρώτη φορά στην παραγωγική γεωμετρία, χωρίς το πραγματικό τους υπόβαθρο να περιλαμβάνει καν την χρήση βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων (Kynigos, 1993). Οι δε δυσκολίες αυτές, τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό (Senk, 1985· Usiskin, 1982· Γαγάτσης1993· Ζαράνης, 1997) εντείνονται ακόμη περισσότερο λόγω των συνθηκών που επικρατούν στην παραδοσιακή διδασκαλία.

Επομένως, οι μαθητές θα πρέπει να εισάγονται στην αποδεικτική διαδικασία με ένα «καλό» τρόπο. Ο προβληματισμός μας αυτός μάς οδήγησε στο να αναλύσουμε την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης και να ταξινομήσουμε τα προϊόντα της σε αυτά που καλέσαμε *δομικά στοιχεία της απόδειξης* και σε *μερικές αποδείξεις*. Η ανάλυση αυτή μας υπέδειξε δύο σημεία. Πρώτον ένα τρόπο «διαβαθμισμένης» διδασκαλίας της απόδειξης και δεύτερον την ανάπτυξη στρατηγικών, ώστε οι αρχάριοι μαθητές της Α΄ τάξης του Λυκείου να λειτουργούν ως ερευνητές (Καλαβάσης & Μεϊμάρης, 2000) στο σχήμα. Αυτά αναπτύσσουμε στη παρούσα εργασία, τα οποία αποτελούν και το θεωρητικό πλαίσιο μιας εν εξελίξει έρευνας, που πραγματοποιείται από το Π. Τ. Δ. Ε. του Πανεπιστημίου της Αθήνας, σε ένα δείγμα μαθητών της Α΄ Λυκείου του 7^{ου} Γενικού Ενιαίου Λυκείου Περιστερίου και αφορά μια «διαβαθμισμένη» διδασκαλία της απόδειξης, που θα αναπτύξουμε παρακάτω.

2. Δομικά Στοιχειά της Απόδειξης

Σύμφωνα με τους Dimakos και Nikoloudakis (2008) μια απόδειξη αποτελείται και αναλύεται σε *απλές αιτιολογήσεις*. Θα αναπτύξουμε εν τάχει αυτήν την άποψη, γιατί κρίνουμε ότι είναι αναγκαία για το παρόν άρθρο.

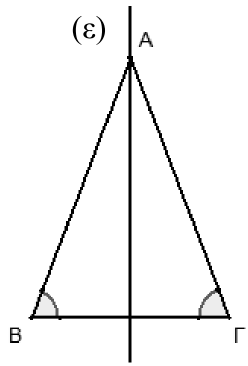
Θεωρούμε ότι κάθε γεωμετρική πρόταση αποτελεί ένα ισχυρισμό και κάθε απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη, ένα ισχυρισμό (που απαιτεί μία αιτιολόγηση) και την αιτιολόγηση (του εν λόγω ισχυρισμού). Για παράδειγμα θεωρείστε τις προτάσεις:



Σχήμα - 1

<u>Πρόταση (Π-1):</u> Τρεις ευθείες τέμνονται στα σημεία Α, Β και Γ. Οι αποστάσεις ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (σχήμα-1).

<u>Πρόταση (Π-2):</u> Αν Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) ενός ευθ. τμήματος ΒΓ, τότε οι γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$ είναι ίσες (σχήμα-2).



Σχήμα - 2

- Για την πρόταση Π-1 (σχήμα-1) ο ισχυρισμός είναι: το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Σημειώνουμε ακόμη ότι τα μέρη της απόδειξης του ισχυρισμού της πρότασης Π-1 είναι:

(i) *Ισχυρισμός:* το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

(ii) *Αιτιολόγηση:* διότι ΑΒ = ΑΓ

Έτσι, λέγοντας ότι: το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, διότι ΑΒ = ΑΓ έχουμε αιτιολογήσει **πλήρως** τον ισχυρισμό: το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές για την πρόταση Π-1 κι **επομένως έχουμε αποδείξει** την πρόταση Π-1.

- Για την πρόταση Π-2 (σχήμα-2) ο ισχυρισμός είναι: οι γωνίες $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$ είναι ίσες, δηλ. $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$ και τα μέρη της απόδειξης του ισχυρισμού είναι:

(i) *ισχυρισμός:* $\widehat{\mathrm{AB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$

(ii) *αιτιολόγηση* : διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

Λέγοντας, όμως, ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές **δεν έχουμε αποδείξει πλήρως** τον ισχυρισμό ότι $\widehat{\mathrm{AB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$, διότι (ισχυριζόμαστε, αλλά) δεν έχουμε αποδείξει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Πρέπει δηλ. να αιτιολογήσουμε και γιατί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές για να ισχύει ο ισχυρισμός (i). Επομένως η αιτιολόγηση (ii): το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές καθίσταται ο ισχυρισμός **μίας νέας πρότασης,** που πρέπει να αποδειχθεί και που η απόδειξή της θα αποτελείται από ένα νέο ισχυρισμό και από την αιτιολόγηση του εν λόγω ισχυρισμού, συγκεκριμένα:

<u>Πρόταση (Π-2.1):</u> Αν Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) ενός ευθ. τμήματος ΒΓ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Τα μέρη της απόδειξης του ισχυρισμού είναι:

(iii) *ισχυρισμός:* το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

(iv) *αιτιολόγηση* : διότι ΑΒ = ΑΓ

και ομοίως η αιτιολόγηση (iv): ΑΒ = ΑΓ καθίσταται ο ισχυρισμός **μίας νέας πρότασης:**

<u>Πρόταση (Π-2.2):</u> Αν Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) ενός ευθ. τμήματος ΒΓ, τότε ΑΒ = ΑΓ. Τα μέρη της απόδειξης του ισχυρισμού είναι:

(v) *ισχυρισμός:* ΑΒ =ΑΓ

(vi) *αιτιολόγηση* : γιατί το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθ. τμήματος ΒΓ,

και ομοίως η αιτιολόγηση (vi): το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθ. τμήματος ΒΓ καθίσταται ο ισχυρισμός **μίας νέας πρότασης:**

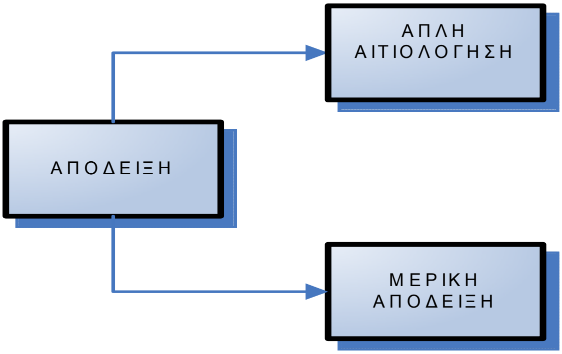
<u>Πρόταση (Π-2.3):</u> Αν Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) ενός ευθ. τμήματος ΒΓ, τότε το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθ. τμήματος ΒΓ. Τα μέρη της απόδειξης του ισχυρισμού είναι:

(vii) *ισχυρισμός:* Αν Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) ενός ευθ. τμήματος ΒΓ

(viii) *αιτιολόγηση* : γιατί το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ευθ. τμήματος ΒΓ και η απόδειξη κατέστη προφανής.

Κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση: η αιτιολόγηση (ii) του ισχυρισμού (i) στην πρόταση Π-1 δεν απαιτεί και άλλη αιτιολόγηση προκειμένου να ισχύει ο ισχυρισμός (i) και η απόδειξη της Π-1 έχει ολοκληρωθεί από τα στοιχεία (i)-(ii). Δεν ισχύει όμως το ίδιο στην πρόταση Π-2 για τις αιτιολογήσεις (ii), (iv) και (vi) της εν λόγω πρότασης, δηλαδή για να ισχύει ο ισχυρισμός (i) πρέπει να ισχύει η αιτιολόγηση (ii), που για να ισχύει η αιτιολόγηση (ii) πρέπει να ισχύει (iv) κ.ο.κ. επομένως **δεν ολοκληρώνεται η απόδειξη της Π-2 μόνον με τα στοιχεία (i)-(ii).**

Όταν η αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού, όπως στην πρόταση Π-1 δεν απαιτεί και άλλη αιτιολόγηση για να ισχύει ο ισχυρισμός, η αιτιολόγηση θα λέμε ότι είναι μια *απλή αιτιολόγηση*. Συγκεκριμένα:



Σχήμα 3

Ορισμός: θα λέμε ότι μια αιτιολόγηση είναι *απλή αιτιολόγηση*, όταν δεν απαιτείται άλλη αιτιολόγηση για να υποστηριχθεί η αλήθεια της. Την απλή αιτιολόγηση θα τη λέμε και (απλή) απόδειξη.

Ορισμός: Η αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού θα λέμε ότι μια είναι σύνθετη αιτιολόγηση ή μερική απόδειξη, όταν η αλήθεια της στηρίζεται σε μια ακόμη άλλη αιτιολόγηση.

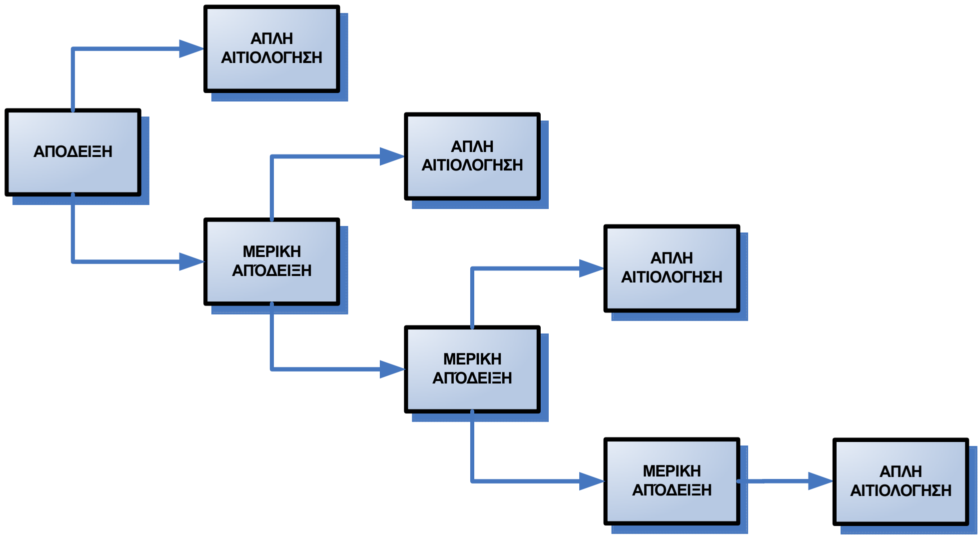
Οι αποδείξεις (i)-(ii), (iii)-(iv), (v)-(vi) της απόδειξης της Π-2 είναι σύνθετες αιτιολογήσεις, ενώ το τελευταίο μέρος της απόδειξης της Π-2, δηλ. η απόδειξη (vii)-(viii) είναι μία απλή αιτιολόγηση. Άρα, τελικά, η απόδειξη της Π-2 αποτελείται από τις μερικές αποδείξεις: (i)-(ii), (iii)-(iv), (v)-(vi) και την απλή αιτιολόγηση (vii)- (viii). Γενικεύοντας, μπορούμε να πούμε ότι η απόδειξη μιας πρότασης συνίσταται από απλές αιτιολογήσεις και μερικές αποδείξεις (σχήμα-3). Όμως, κάθε μερική απόδειξη αποτελεί από μόνη της μία απόδειξη και άρα αναλύεται σε απλές αιτιολογήσεις και μερικές αποδείξεις κ.ο.κ. Άρα τελικά μία απόδειξη αναλύεται σε απλές αιτιολογήσεις. (σχήμα-4). **Τις απλές αιτιολογήσεις καλούμε δομικά στοιχεία της απόδειξης.**

3. Προ-Απλή Απλή και Σύνθετη Πρόταση

Ορισμός. Θα λέμε ότι *μία πρόταση είναι απλή*, όταν η απόδειξή της είναι μία απλή αιτιολόγηση (Πίνακας-1).

Ορισμός. Θα λέμε ότι *μία πρόταση είναι* σύνθετη ή μερική, όταν η απόδειξή της είναι μία μερική απόδειξη.

Ακόμα ορίζουμε ως *προ-αιτιολόγηση* μία ολιστική (gestalt) αναγνώριση του σχήματος και ως *προ-απλές,* τις προτάσεις αυτές που αντιστοιχούν σε μια *προ-_αιτιολόγηση*



Σχήμα -4 Ανάλυση απόδειξης σε απλές αιτιολογήσεις

4. Τα Χαρακτηριστικά των Αιτιολογήσεων

1. <u>Προ - αιτιολόγηση</u>

Το βασικό χαρακτηριστικό των προ-αιτιολογήσεων είναι ότι δεν απαιτούν αιτιολόγηση, αλλά μία ολιστική αναγνώριση (gestalt) του σχήματος. Αυτό σημαίνει:

(i) Η σκέψη του μαθητή απευθύνεται ολιστικά σε ένα και μόνον συγκεκριμένο σχήμα.

(ii) Ο μαθητής δεν αναλύει το σχήμα στις ιδιότητές του κι επομένως γι αυτό αρκεί να λειτουργεί στο $1^{ο}$ επίπεδο van Hiele.

(iii) Ο μαθητής διαπραγματεύεται προ-απλές προτάσεις.

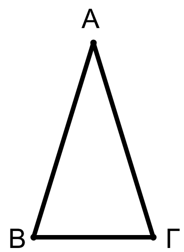
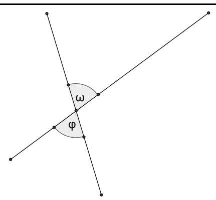
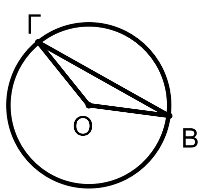
2. <u>Απλή αιτιολόγηση</u>

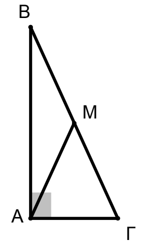
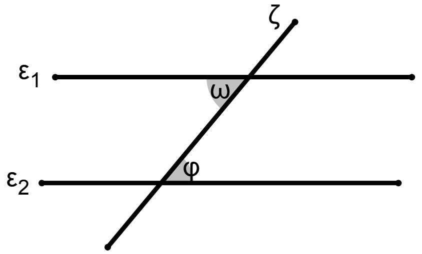
Το βασικό χαρακτηριστικό των απλών αιτιολογήσεων (δομικών στοιχείων της απόδειξης) είναι ακριβώς ότι η αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού δεν απαιτεί και άλλη αιτιολόγηση για να ισχύει ο ισχυρισμός. Αυτό σημαίνει:

(i) Η σκέψη του μαθητή απευθύνεται σε ένα και μόνον συγκεκριμένο σχήμα, από το οποίο καλείται να εξαγάγει ένα συμπέρασμα.

(ii) Ο μαθητής αναλύει το σχήμα στις ιδιότητές του κι επομένως γι αυτό απαιτείται να λειτουργεί τουλάχιστον στο $2^{ο}$ επίπεδο van Hiele.

(iii) Ο μαθητής διαπραγματεύεται απλές προτάσεις.

<table>
<tr><th colspan="3">ΔΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ
Πίνακας1: Δομικά στοιχεία της απόδειξης</th></tr>
<tr><th>Απλή πρόταση</th><th>Σχήμα</th><th>Απλή απόδειξη</th></tr>
<tr><td>Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.</td><td>
</td><td>Απόδειξη
Ισχυρισμός: το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές
Αιτιολόγηση: διότι ΑΒ = ΑΓ</td></tr>
<tr><td>Οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ στο σχήμα είναι ίσες</td><td>
</td><td>Απόδειξη
Ισχυρισμός: $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$
Αιτιολόγηση: διότι είναι κατακορυφήν</td></tr>
<tr><td>Τα ευθ. τμήματα ΟΒ και ΟΓ στο σχήμα είναι ίσα</td><td>
</td><td>Απόδειξη
Ισχυρισμός: ΟΒ = ΟΓ
Αιτιολόγηση: διότι είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου</td></tr>
</table>

Η ΑΜ είναι το μισό της ΒΓ		Απόδειξη *Ισχυρισμός:* $\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ *Αιτιολόγηση:* γιατί Η ΑΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ
Δίνεται ότι $ε_1$ // $ε_2$ στο σχήμα. Δείξτε ότι οι γωνίες $\widehat{ω}$ και $\widehat{φ}$ είναι ίσες		Απόδειξη *Ισχυρισμός:* $\widehat{ω}=\widehat{φ}$ *Αιτιολόγηση:* διότι είναι εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $ε_1$ και $ε_2$ που τέμνονται από την ευθεία ζ

3. <u>Μερική απόδειξη</u>

Το βασικό χαρακτηριστικό των μερικών αποδείξεων είναι ότι η αιτιολόγηση ενός ισχυρισμού απαιτεί και άλλη αιτιολόγηση για να ισχύει ο ισχυρισμός. Αυτό σημαίνει:

(i) Για μια μερική απόδειξη απαιτούνται δύο τουλάχιστον αιτιολογήσεις, που σημαίνει διπλή τουλάχιστον θεώρηση και ανάλυση του ενός σχήματος ή θεώρηση και ανάλυση δύο τουλάχιστον διαφορετικών σχημάτων με συσχετισμό των ιδιοτήτων τους. Επομένως ο μαθητής απευθύνεται σε περισσότερα του ενός σχήματα.

(ii) Ο μαθητής αναλύει και συσχετίζει ιδιότητες περισσοτέρων του ενός σχημάτων μέσα από ένα δίκτυο σχέσεων που πρέπει να έχει στη διάθεσή του (van Hiele, 1986) και επομένως πρέπει να λειτουργεί τουλάχιστον στο τρίτο επίπεδο της θεωρίας van Hiele.

(iii) Ο μαθητής διαπραγματεύεται σύνθετες προτάσεις.

5. Διαβαθμισμένη Διδασκαλία της Απόδειξης

Τα χαρακτηριστικά των αιτιολογήσεων επιβάλλουν μια διαβαθμισμένη διδασκαλία της απόδειξης, και αυτό προτείνουμε με αυτήν την εργασία, δηλ. τη διδασκαλία προ-αιτιολογήσεων, αιτιολογήσεων και μερικών αποδείξεων, πριν ο δάσκαλος διδάξει τις τυπικές αποδείξεις. Οι προτάσεις που θα χρησιμοποιήσει είναι συνάρτηση της διαβαθμισμένης διδασκαλίας, δηλ. προ-απλές, απλές, σύνθετες και τυπικές. Ακόμη ορίζουμε ως *επίπεδο αποδεικτικής ικανότητας του μαθητή* την ικανότητά του να αποδεικνύει προ-απλές, απλές, σύνθετες και τυπικές προτάσεις (Πίνακας -2) και λέμε αντίστοιχα ότι είναι αποδεικτικής ικανότητας: 1, 2, 3 και 4.

Πίνακας 2: *Πίνακας επιπέδου πρότασης, επιπέδου απόδειξης και αποδεικτικής ικανότητας του μαθητή*

Επίπεδο van Hiele		**Σχήμα**	**Αιτιολογήσεις**	**Επίπεδο Πρότασης**	**Αποδεικτική Ικανότητα του Μαθητή**	
1^{o}	Ολότητες	Gestalt αναγνώριση	Καμία Αιτιολόγηση	Προ-απλή	1	Προ-Αιτιολογήσεις
2^{o}	Ανάλυση	Ανάλυση Ιδιότητες ενός σχήματος	Ακριβώς μία Αιτιολόγηση	Απλή	2	Αιτιολογήσεις
3^{o}	Ταξινόμηση	Ορισμοί. Ιδιότητες συσχετισμός Δύο τουλάχιστον σχήματα.	Ακριβώς 2 Αιτιολογήσεις	Σύνθετη	3	Μερικές Αποδείξεις
4^{o}	Ακρίβεια	Σύνθετα Σχήματα Δίκτυο.	Πάνω από 2 Αιτιολογήσεις	Τυπική	4	Τυπικές Αποδείξεις

Επιπλέον, προκειμένου να βοηθήσουμε τους μαθητές στη διαδικασία της απόδειξης, τους εφοδιάσαμε με στρατηγικές, που αναπτύσσουμε αμέσως πιο κάτω.

6. Οι Στρατηγικές

Προτείναμε στρατηγικές δύο ειδών. Πρώτον *στρατηγικές διερεύνησης σχήματος,* δηλ. του τύπου: Τι είναι αυτό; Τι μου θυμίζει; Τι ρόλο παίζουν τα άκρα του; (για ευθ. τμήματα) κ.λπ., συσχετισμένες με στις δεξιότητες του Hoffer (1981) και να βοηθούν το μαθητή να ανακαλύψει τις απλές προτάσεις που «κρύβονται» στο σχήμα (πίνακας-3) και *στρατηγικές αιτιολόγησης* μέσω των οποίων οι μαθητές θέτουν στόχους προς διαπραγμάτευση. Οι στρατηγικές αιτιολόγησης προέκυψαν από την ανάλυση της απόδειξης (πίνακας-4), δηλ. *για να δείξω* τον ισχυρισμό *αρκεί να δείξω* την αιτιολόγηση του ισχυρισμού.

Πίνακας 3: *Πίνακας στρατηγικών διερεύνησης σχήματος*

Στρατηγικές	**Δεξιότητες του Hoffer**
Κατασκευάζω το σχήμα	Σχεδιαστική
Διατυπώνω την πρόταση με τη βοήθεια του σχήματος	Λεκτική – Οπτική
Τι είναι αυτό;	Οπτική - Αναγνώριση
Τι μου θυμίζει;	Οπτική - Εφαρμογής
Τι ρόλο παίζουν τα άκρα του; (για ευθ. τμήματα)	Οπτική - Λογική
Τι ξέρω από τη θεωρία για αυτό;	Λογική

Πίνακας 4: *Πίνακας στρατηγικών αιτιολόγησης*

Ανάλυση της απόδειξης της Π-2		**Ανάπτυξη στρατηγικής για την Π-2**	
Ισχυρισμός	**Αιτιολόγηση**	**Για να δείξω**	**Αρκεί να δείξω**
$\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$	διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές	$\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$	ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές
το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές	διότι ΑΒ = ΑΓ	το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές	ότι ΑΒ = ΑΓ
ΑΒ = ΑΓ	διότι το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθ. τμήματος ΒΓ	ΑΒ = ΑΓ	ότι το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθ. τμήματος ΒΓ

Έτσι αναπτύξαμε στρατηγικές όπως: « Για να δείξω ότι……… Αρκεί να δείξω ότι………». «Τι ξέρω από τη θεωρία για αυτό;». κ.λπ. Τα πιο πάνω υλοποιήθηκαν με τη βοήθεια ενός επαναχρησιμοποιήσιμου πρότυπου πίνακα (βλ. παράρτημα) με συγκεκριμένη δομή και σύνταξη που βοηθά το μαθητή στην παραγωγή της σκέψης και τον οποίο καλέσαμε Πίνακα Ελέγχου του Συλλογισμού της Αποδεικτικής Διαδικασίας - ΠΕΣΑΔ (Dimakos, et al., 2007). Η δομή του συνίσταται από στήλες, από γραμμές και πλαίσια που αποτελούν τα έξι μέρη του, που τα καλούμε τμήματα (Nikoloudakis, accepted for publication). Λόγω χώρου θα αρκεστούμε να αναφέρουμε μόνον ότι στο τμήμα 5, της ανάπτυξης συλλογισμών (βλ. παράρτημα), ο μαθητής θέτει στόχους και σκέπτεται πώς θα τους πετύχει εφαρμόζοντας την προαναφερθείσα στον πίνακα 4 στρατηγική: Για να δείξω ότι… Αρκεί να δείξω ότι….

Αναφορές

Balacheff, N. (1988). A study of pupil's proving processes at the junior high school level. *Paper presented at the 66th Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics,* U.S.A.

Davis, P., Hersh, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία,* εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., (2008). Teaching Euclidean Geometry using a synthesis by two well known theories: van Hiele's theory and Cognitive Apprenticeship. *Far East Journal of Mathematical Education Volume 2, Issue 2, Pages 187 - 217*

Dimakos, G., Nikoloudakis E., Ferentinos, S., Choustoulakis, E., (2007). Developing a Proof-Writing Tool for Novice Lyceum Geometry Students. *The Teaching Of Mathematics* Vol. X, 2, pp. 87–106

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof, *Mathematics Teacher,* 74, 11-18.

Kynigos, C. (1993). Children's Inductive Thinking during Intrinsic and Euclidean Geometrical Activities in a Computer Programming Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 177-197.

Nikoloudakis, E. A Proposed Model to Teach Geometry to First-Year Senior High School Students, *HMS International Journal for Mathematics in Education* (accepted for publication).

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78, 448-456.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry,* Columbus, OH, ERIC.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Orlando, FL: Academic.

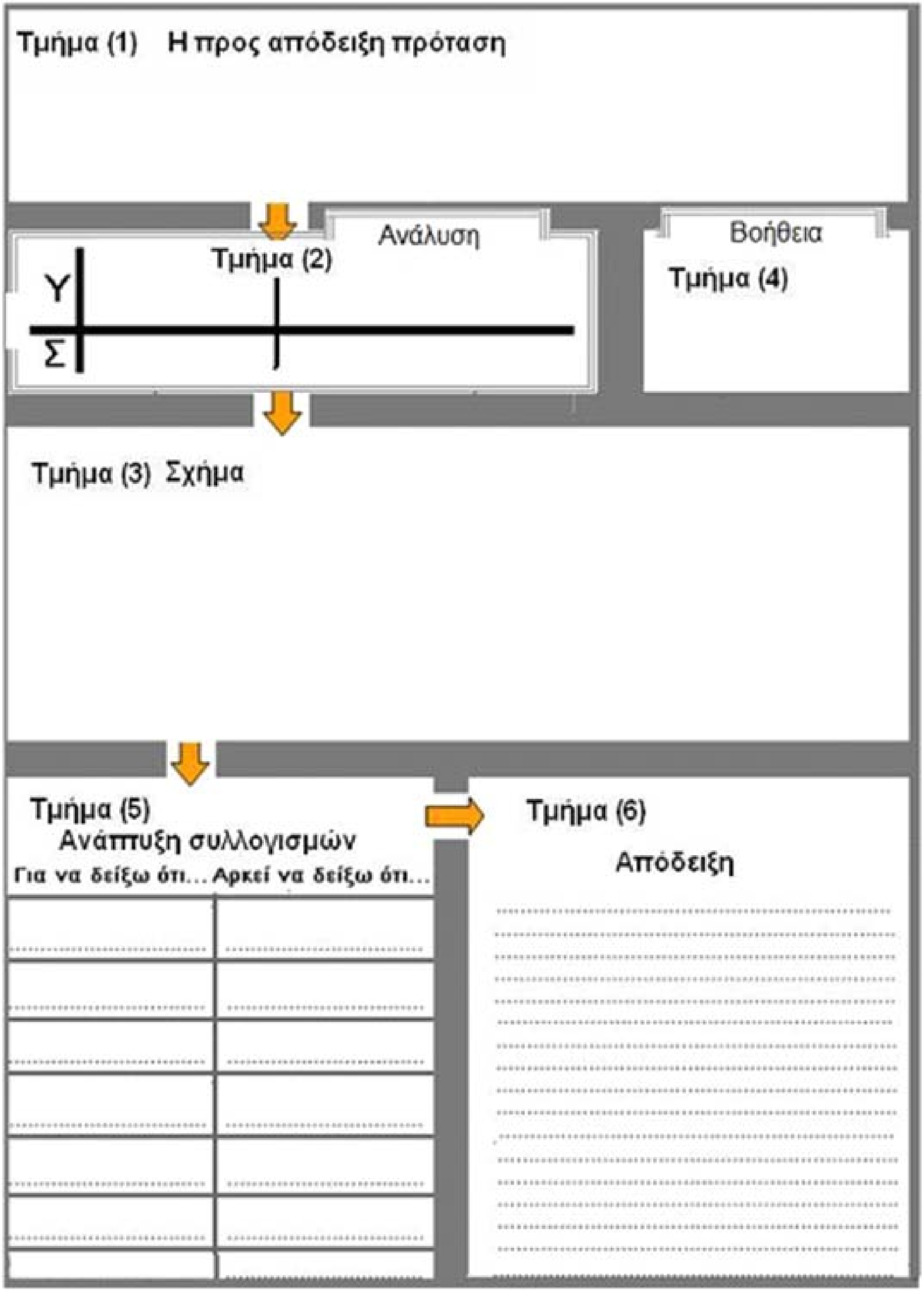
Γαγάτσης, Α., (1993) *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών* Εκδόσεις Κυριακίδη Θεσσαλονίκη

Ζαράνης, Ν. (1997). Ανάπτυξη και υλοποίηση των επιπέδων van Hiele στην γεωμετρία με τη βοήθεια υπολογιστή, *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας,* ΕΜΕ, 281-291.

Θωμαΐδης,Γ., Πούλος, Α. (2000) *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας* Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Καλαβάσης, Φ., & Μεϊμάρης, Μ. (2000). *Διεπιστημονική Προσέγγιση των Μαθηματικών και της Διδασκαλίας τους*. Αθήνα: Gutenberg.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ


Τμήμα (1) Η προς απόδειξη πρόταση
Ανάλυση
Τμήμα (2)
Υ
Σ
Βοήθεια
Τμήμα (4)
Τμήμα (3) Σχήμα
Τμήμα (5)
Ανάπτυξη συλλογισμών
Για να δείξω ότι...
Αρκεί να δείξω ότι...
Τμήμα (6)
Απόδειξη