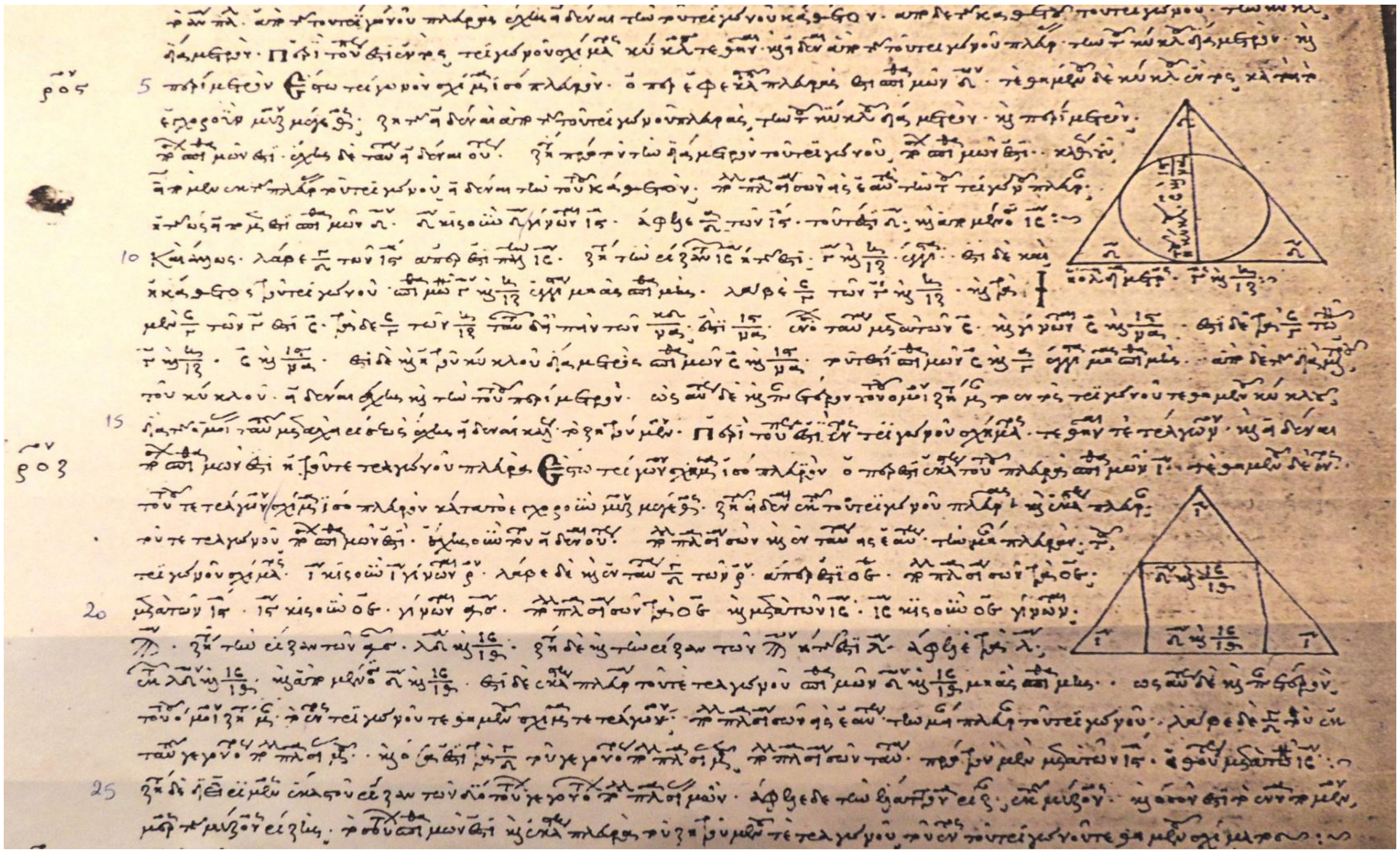
Ἐφαρμογὲς τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος

Σύμφωνα μὲ ἑλληνικὸ χειρόγραφο τοῦ 15^ου^ αἰ.



Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

- **Τὸ Πυθαγόρειο Θεώρημα καὶ οἱ ἐφαρμογές του σύμφωνα μὲ ἑλληνικὸ χειρόγραφο τοῦ 15ου αἰ.**

- Ὁ κώδικας 65 (Βιενναῖος ἑλληνικός φιλ. Κώδικας 65) εἶναι ἀνώνυμος, χρονολογεῖται στὸν 15ον αἰ. μ.Χ. καὶ περιλαμβάνει προβλήματα Λογιστικῆς καὶ Γεωδαισίας. Σὲ αὐτὸ τὸ ἄρθρο περιέχονται ἐπιλεγμένα θεωρητικὰ θέματα, καὶ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἐπιλύονται μὲ τὴ χρήση κυρίως τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος, καθὼς καὶ τὰ σχετικὰ μαθηματικὰ σχόλια ἐπ' αὐτῶν. Ἐπιχειρεῖται ἑρμηνευτική προσέγγιση τῶν μεθόδων τοῦ συγγραφέα, τὶς ὁποῖες συνέκρινα μὲ τὶς ἀντίστοιχες σύγχρονες μεθόδους ποὺ χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὴ διδασκαλία στὴ δευτεροβάθμια εκπαίδευση

The Pythagorean Theorem and its application, according to a Greek Manuscript of the 15th century

Maria Chalkou D.
State School Adviser of Mathematics
Dr. of Mathematics of NKUA

The Code 65 (Codex Vindobonensis phil. graecus 65) dates from the 15th century. In this Code included are problems of Logisticae and Geodaesia. This article contains some chosen problems of the manuscript, which are solved mainly by the use of the Pythagorean Rule, and their mathematical comments. I tried an interpretative approach of the author's methods, as well as a comparison of these with the corresponding ones of today, which are taught in the secondary education.

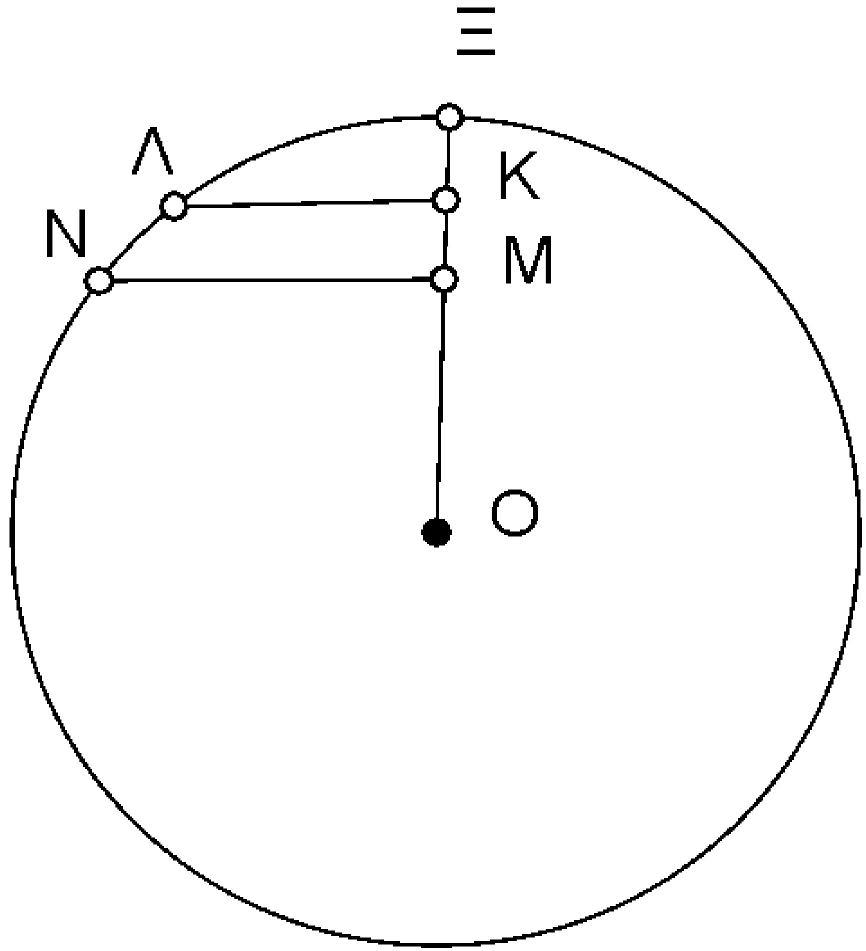
- **Ὁ Βιενναῖος ἑλληνικὸς κώδικας 65 (Codex Vindobonensis phil. gr. 65),**
- εἶναι ἕνα βυζαντινὸ χειρόγραφο τοῦ 15ου αἰ. μ.Χ. τοῦ ὁποίου ὁ συγγραφέας καὶ ἡ προέλευση εἰναι ἄγνωστα. Τὸν κώδικα ἀπέκτησε ὁ Augerius von Busbeck, ὅταν ἦταν πρεσβευτὴς τοῦ αὐτοκράτορα Φερδινάνδου Α΄ στὴν αὐλὴ τοῦ σουλτάνου Σουλεϊμὰν τοῦ Β΄ (1555-1562 μ.Χ.). Τὸ μεγαλύτερο μέρος τοῦ κώδικα περιέχει ἕνα ἀνώνυμο βιβλίο ἀριθμητικῆς, τῆς ὁποίας τὸ προοίμιο καὶ τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια ἐξέδωσε ὁ J. L. Heiberg τὸ 1899. Τὸ ἔργο στὸ σύνολό του ἐκδόθηκε τὸ 2006 ἀπὸ τὸ Κέντρο Βυζαντινῶν Ἐρευνῶν τοῦ Ἀριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, καὶ χαρακτηρίστηκε διεθνῶς Πηγή γιὰ τὴ Μελέτη καὶ τὴ Διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν.
- Ἡ ἑνδεκάτη ἑνότητα τοῦ κώδικα (κεφ. 167-184), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ πρῶτο μέρος τῆς Γεωμετρίας περιλαμβάνει προβλήματα ποὺ λύνονται κυρίως μὲ τὴ χρήση τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἢ τοῦ "κανόνα τῆς σκάδρας", ὅπως αὐτὸ ὀνομάζεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα του. Οἱ μεθοδολογίες ἐπίλυσης, ἂν καὶ σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις δὲν εἶναι διόλου γνωστές στὸν σύγχρονο μαθηματικὸ τῆς Δευτεροβάθμιας Ἐκπαίδευσης, ἔχουν, ὅπως διαπιστώνουμε ἀπὸ τὰ παραδείγματα ποὺ ἀκολουθοῦν, ἀρκετὰ κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτὲς ποὺ χρησιμοποιοῦμε σήμερα σὲ ἀνάλογα προβλήματα.

- **κεφ. 167. (ρξζ). Εὕρεση τῆς διαμέτρου κύκλου ἀπὸ τὴν περίμετρο αὐτοῦ.**

- Ὁ συγγραφέας τοῦ κώδικα θεωρεῖ τὴν περίμετρο ἴση μὲ 22 σπιθαμές, καὶ γράφει πὼς ὁ λόγος τῆς περιμέτρου πρὸς τὴν διάμετρο εἶναι πάντα ἴσος μὲ 3 1/7= 22/7. Κατὰ συνέπεια ἡ ζητουμένη διάμετρος θὰ εἶναι ἴση μὲ 22/(22/7)= 7 σπιθαμές.
- Προφανῶς τὸ 3 1/7 ἀντιπροσωπεύει τὸν ἀριθμὸ π, δηλαδὴ ἀποτελεῖ μία προσέγγιση τοῦ π= 3,14159...
- Ὁ συγγραφέας ἀσχολεῖται ἀποκλειστικὰ μὲ τὴν Εὐκλείδεια γεωμετρία, τὴν ὁποία ἐφαρμόζει σὲ ἀσκήσεις καθαρὰ πρακτικοῦ περιεχομένου, χωρὶς ὅμως νὰ ἀπουσιάζουν καὶ τὰ θεωρητικὰ ζητήματα. Ὁρίζει τὸν ἀριθμὸ π ὡς τὸν λόγο τῆς περιμέτρου δοθείσης περιφέρειας πρὸς τὴ διάμετρό της, καὶ θεωρεῖ ὅτι ἰσοῦται πρὸς 22/7, ἢ 3 1/7. Αὐτὴ ἡ προσέγγιση, χωρὶς βέβαια νὰ εἶναι ἱκανοποιητική, ἦταν παραδεκτὴ ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν Ἀρχιμήδη, ἐφόσον θὰ τὴ χρησιμοποιοῦσαν σὲ πρακτικὲς μετρήσεις. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ὑποθέσουμε, ὅτι ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο ἀκόμα καὶ σὲ θέματα θεωρητικοῦ περιεχομένου χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸν συγγραφέα ἡ τιμὴ 3 1/7, εἶναι διότι αὐτὰ τὰ ζητήματα ἀποτελοῦσαν κατ' οὐσίαν προγύμνασμα γιὰ τὰ προβλήματα ποὺ ἀκολουθοῦσαν, καὶ τὰ ὁποῖα ἦταν πρακτικὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς.

- **κεφ. 169. (ρξθ). Εὕρεση τῆς διαμέτρου δ καὶ τῆς περιμέτρου Π κύκλου μὲ κέντρο τὸ Ο, ἀπὸ τὸ μῆκος δύο χορδῶν μήκους 8 καὶ 3 σπιθαμῶν καὶ τὴν ἀπόσταση τῶν μέσων Μ καὶ Κ αὐτῶν ἀπὸ τὴν περιφέρεια.**
- Ὁ συγγραφέας θέτει ΜΞ=2, ΜΚ=1, ΜΝ=4, ΚΛ=3, καὶ ἀκολουθεῖ τὴν ἑξῆς διαδικασία:
- 4.4= 16, 3.3= 9, 1.1= 1, 9+1= 10, 16-10= 6, 2.1= 2, 6/2= 3, 3.3= 9, 9+16= 25, ρίζα τοῦ 25 ἴσον 5, καὶ 5.2= 10= δ.
- Θὰ πρέπει νὰ ἔχει βασιστεῖ στὰ ἑξῆς:
- $ON^2=MN^2+OM^2$ (1)
- $O\Lambda^2=\Lambda K^2+OK^2$ (2)
- Ἀφαιρώντας κατὰ μέλη τὶς σχέσεις (1), καὶ (2) προκύπτει:
- $MN^2-\Lambda K^2=OK^2-OM^2$, δηλαδὴ
- $16-9=(OM+KM)^2-OM^2$, ἄρα
- $16-9=\cancel{OM^2}+KM^2+2.OM.KM-\cancel{OM^2}$, ὁπότε
- 16-9=1+2.ΟΜ.1, ἢ
- 16-10=2.ΟΜ, κατὰ συνέπεια
- 6=2.ΟΜ, δηλαδὴ
- ΟΜ=6/2=3, ἄρα
- ἐπειδὴ $OM^2+MN^2=ON^2=\rho^2$, τότε
- $\rho^2=9+16=25$, ὁπότε ρ=5

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

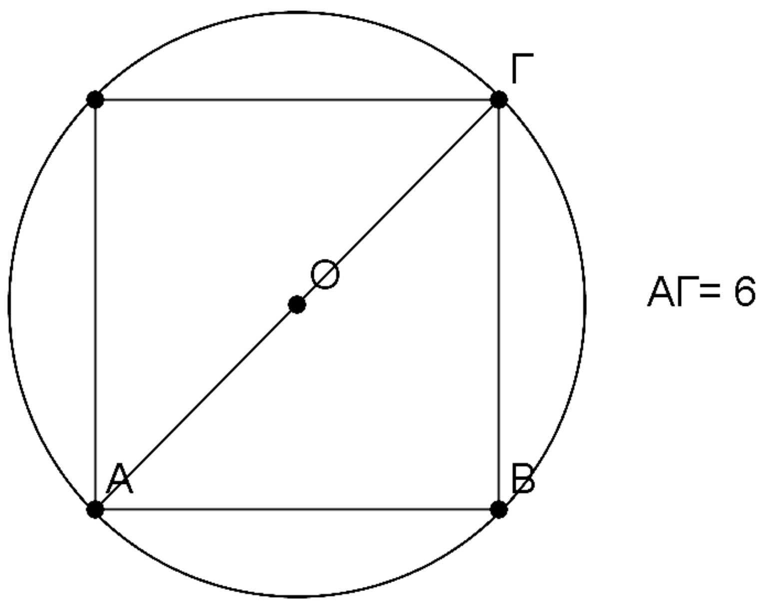


Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

- Χρησιμοποιεῖ ἐπίσης καὶ ἕναν ἄλλο τρόπο:
- 4.4= 16, 16/2= 8, 8+2= 10= δ, Π= 10.(3 1/7)= 31 3/7.
- Ὅσον ἀφορᾶ στὸν δεύτερο τρόπο θὰ πρέπει κατὰ τὸν συγγραφέα νὰ ἰσχύει ἡ σχέση:
- $MN^2/2+M\Xi= 2.O\Xi$, ἢ
- $MN^2/2= OM+O\Xi$, ἢ
- $\rho^2-OM^2= 2.OM+2.O\Xi$, ἢ
- ρ-ΟΜ= 2 τὸ ὁποῖο ἰσχύει στὴν συγκεκριμένη περίπτωση.
- Σήμερα ἄν συμβολίσουμε μὲ ρ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, καὶ ἐφαρμόσουμε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΜΝ, θὰ ἰσχύει:
- $\rho^2= 4^2+(\rho-2)^2$, ἀπὸ ὅπου ρ= 5, καὶ δ= 10, δηλαδὴ Π= 10.π

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

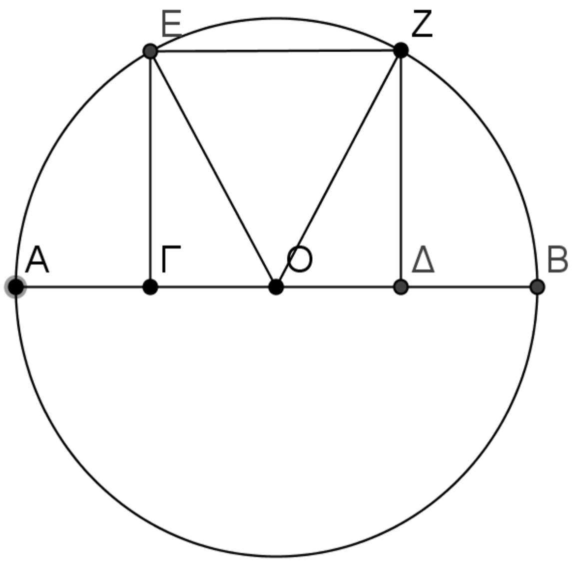
κεφ. 170. (ρο). Σὲ αὐτὸ τὸ πρόβλημα θεωρεῖ κύκλο διαμέτρου 6 καὶ ζητεῖ τὴν πλευρὰ ΑΒ τοῦ ἐγγεγραμμένου σ’ αὐτὸν τετραγώνου.



- Θεωρεῖ τὴν διαγώνιο τοῦ ζητουμένου τετραγώνου ἴση μὲ τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου, καὶ ἐφαρμόζει τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Πρόκειται γιὰ μία ἁπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τὴν ὁποία θὰ ἐπιλύαμε καὶ σήμερα μὲ τὴν ἴδια μέθοδο

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

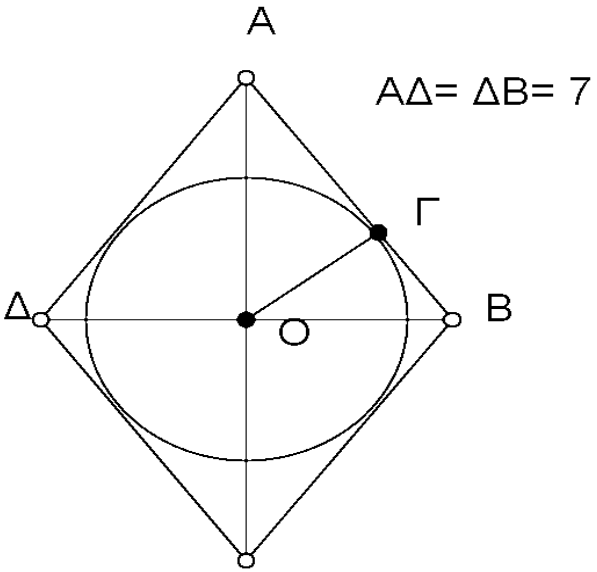
κεφ. 171. (ροα). Μὲ πλευρὰ τμῆμα τῆς διαμέτρου ΑΒ= 12 κύκλου, ζητεῖ νὰ κατασκευαστεῖ τετράγωνο μὲ δύο διαδοχικές κορυφὲς ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τὶς ἄλλες δύο ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.



- Ἔστω ΓΕΖΔ τὸ ζητούμενο τετράγωνο. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΟ καὶ ΓΕΟ εἶναι ἴσα ἐπειδὴ ἔχουν ΔΖ=ΓΕ (πλευρὲς τετραγώνου), καὶ ΟΖ=ΟΕ=ρ=6. Ἄρα ΟΔ=ΟΓ=χ/2, ὅπου χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητούμενου τετραγώνου.
- Ἐφαρμόζουμε τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΔΖΟ:
- $6^2 = \chi^2 + (\chi/2)^2$, ἢ
- $\chi^2 = 144/5$, ἢ
- $\chi = \sqrt{(144/5)}$.
- Ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου περιγράφει μόνο τὸ τελευταῖο βῆμα τῆς πιὸ πάνω διαδικασίας, δηλαδὴ ὑπολογίζει κατευθείαν τὸ χ ὡς τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $AB^2/5$, χωρὶς αἰτιολόγηση.

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

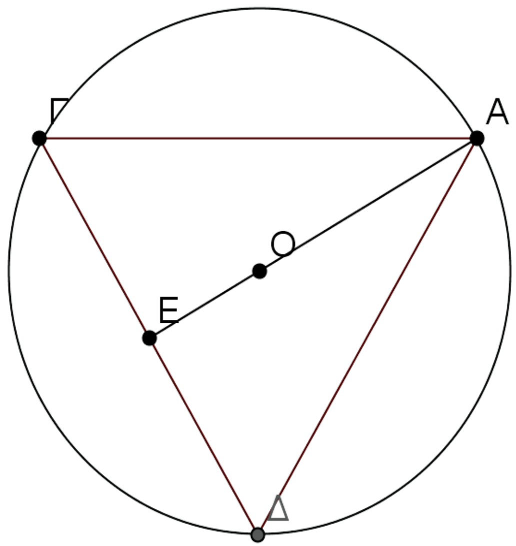
κεφ. 173. (ρογ). Ζητεῖται νὰ κατασκευαστεῖ κύκλος ἐντὸς ρόμβου πλευρᾶς ἴσης μὲ 7, ἐφαπτόμενος στὶς πλευρὲς τοῦ ρόμβου. Θεωρεῖ καὶ τὴ μικρὴ διαγώνιο τοῦ ρόμβου ἴση μὲ 7.



- Ὁ συγγραφέας γράφει: $OA^2 = 49-49/4 = 3.49/4$, ὁπότε $2OA = 7\sqrt{3}$. Χρησιμοποιεῖ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα τὸ ὁποῖο γιὰ πρώτη φορὰ ὀνομάζει **κανόνα τῆς σκάδρας**. Στὴ συνέχεια ἰσχυρίζεται χωρὶς νὰ τὸ ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ ΟΑ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου. Αὐτὸ ἰσχύει προφανῶς, διότι τὸ τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσόπλευρο καὶ τὸ ΟΑ εἶναι ὕψος καὶ διχοτόμος αὐτοῦ, ὁπότε $OA = (7\sqrt{3})/2 = 2O\Gamma$, ὅπου $\rho = O\Gamma \perp AB$.

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

κεφ. 174. (ροδ). Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο διαμέτρου 12 σπιθαμῶν.

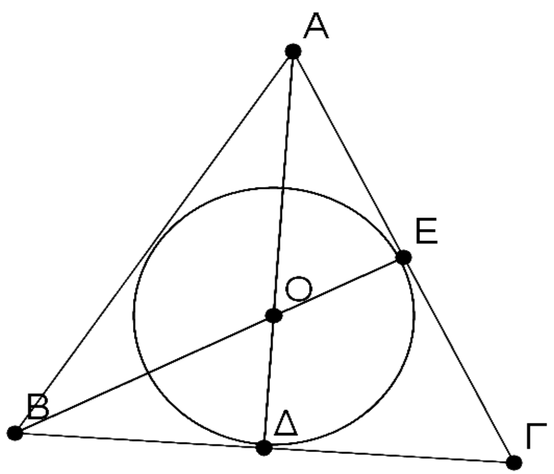


- Ὑπολογίζει τὴν ΑΕ= (3/4)12= 9, καὶ γράφει: 81+81/3= 108. Βρίσκει κατόπιν τὴν ρίζα τοῦ 108 τὴν ὁποία θεωρεῖ ἴση μὲ 10 7/8, καὶ αὐτὴ θεωρεῖ ὡς τὴν ζητουμένη πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.
- Σήμερα θὰ γράφαμε:
- $ΑΔ^2= ΑΕ^2+ΕΔ^2= (ρ+ρ/2)^2+ΕΔ^2= (3ρ/2)^2+ΕΔ^2= 9ρ^2/4+ρ^2-ρ^2/4= 3ρ^2= 108$, δηλαδὴ $ΑΔ= \sqrt{108}$.
- Ὁ συγγραφέας τοῦ χειρογράφου προφανῶς βασίζεται στὸ ὅτι
- $ΑΔ^2= ΑΕ^2+(1/3)ΑΕ^2= ΑΕ^2+(ΑΕ\sqrt{3}/3)^2= ΑΕ^2+ΕΔ^2$, καὶ αὐτὸ ἰσχύει διότι ἀπὸ τὴν σχέση $υ= α\sqrt{3}/2$, ὅπου υ καὶ α εἶναι τὸ ὕψος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀντιστοίχως, προκύπτει ἡ σχέση
- $ΕΔ= α/2= ΑΕ\sqrt{3}/3$.

κεφ. 176. (ρος). Ὑπολογισμὸς τῆς περιμέτρου κύκλου ἐγγεγραμμένου σὲ ἰσόπλευρο τρίγωνο, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου

- Στὸ χειρόγραφο ὑπολογίζεται τὸ τετράγωνο τῆς πλευρᾶς, τὸ ὁποῖο ἰσοῦται μὲ 16, ἀφοὺ ἡ πλευρὰ δίνεται ἴση μὲ 4. Κατόπιν ἀφαιρεῖται τὸ 1/4 τοῦ 16 ἀπὸ τὸ 16, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι 12. Τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, δηλαδὴ τὸ ΑΔ εἶναι ἴσο μὲ τὴν ρίζα τοῦ 12 ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ 3 8/17. Ἡ δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ 2/3 τοῦ 3 8/17, δηλαδὴ μὲ 2 16/51. Κατόπιν ὑπολογίζεται ἡ περίμετρος πολλαπλασιάζοντας τὴν διάμετρο μὲ τὸ 3 1/7.

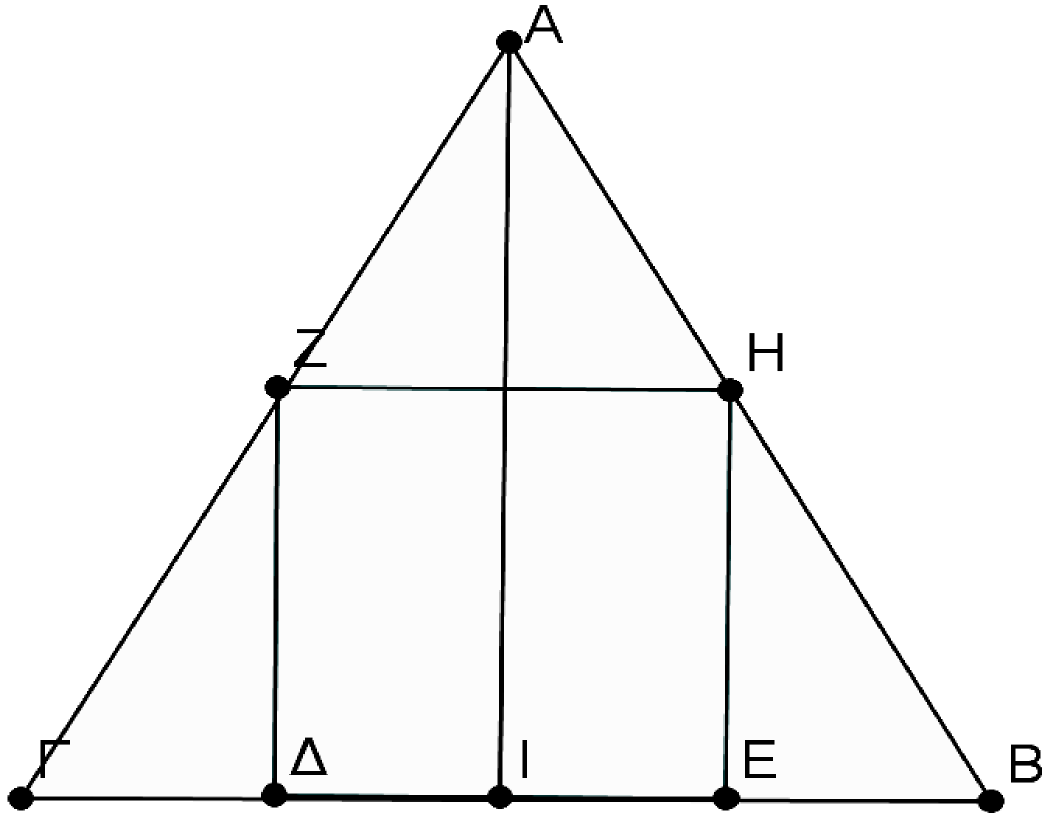
Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com



- Ὁ συγγραφέας ἐφαρμόζει τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα στὸ τρίγωνο ΔΑΓ, ὁπότε:
- ΑΔ=√(ΑΓ²-ΔΓ²)=√12 τὴν ὁποία θέτει ἴση πρὸς 3 8/17. Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἴση μὲ 2.ΟΔ=(2/3)(3+8/17)=2+16/51, ἡ δὲ περίμετρος θὰ εἶναι ἴση μὲ (2+16/51).(3+1/7)
- Οἱ μαθητὲς σήμερα θὰ μποροῦσαν νὰ ὑπολογίσουν κατευθεῖαν τὸ τμῆμα ΟΔ= 1/3(4√3/2)= 2√3/3, ὁπότε ἡ περίμετρος θὰ ἦταν ἴση μὲ 4π√3/3. Σημειωτέον, ὅτι οἱ μαθητὲς τοῦ Λυκείου γνωρίζουν ὅτι τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α εἶναι ἴσο μὲ α√3/2.

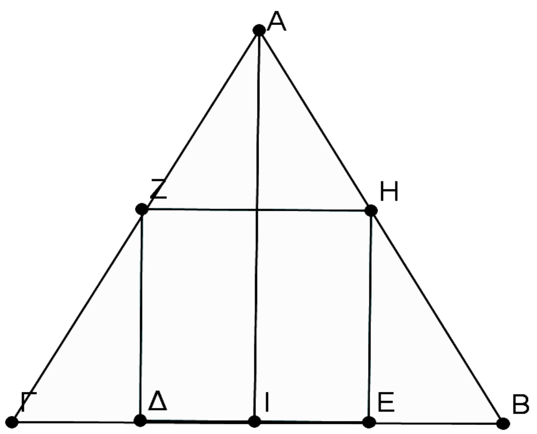
Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

κεφ. 177. (ροζ). Εὕρεση τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ σχήματος εἶναι ἴση με 10.



Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

- Ἡ σειρὰ τῶν πράξεων οἱ ὁποῖες παρουσιάζονται στὸ χειρόγραφο, εἶναι ἡ ἑξῆς:
- 10.10= 100, 100.3/4= 75, 75.16= 1200, 75.12= 900, √1200= 34 12/19, √900= 30, 34 12/19-30= 4 12/19= χ, (ὅπου χ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου).



- **Σήμερα θὰ ἀντιμετωπίζαμε τὸ ζήτημα ὡς ἑξῆς:**

- Θὰ θεωρούσαμε τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἴση μὲ χ, καὶ ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΖΔ καὶ ΒΗΕ εἶναι ἴσα (ΖΔ=ΗΕ=χ, καὶ γωνία Γ=γωνία Β=60°), τότε ΓΔ=ΕΒ, ἄρα ΔΙ=ΙΕ=χ/2, ὅπου Ι τὸ ἴχνος τῆς ΑΙ ἐπὶ τῆς ΒΓ (ΑΙ ὕψος, διάμεσος καὶ διχοτόμος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ). Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΓΖΔ καὶ ΓΑΙ εἶναι ὅμοια, ὁπότε ἰσχύει ἡ ἀναλογία
- ΔΖ/ΑΙ=ΓΔ/ΓΙ, δηλαδὴ
- χ/(10√3/2)= (5-χ/2)/5, ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει
- χ= 2√3(10-5√3).
- Καταλαβαίνουμε λοιπὸν ὅτι στὸ χειρόγραφο ἡ διαφορὰ
- √(75.16)- √(75.12) τίθεται ἴση μὲ χ, ἐπειδὴ αὐτὴ ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ
- $\sqrt{3}.\ \sqrt{(25.16)} - \sqrt{3^2}\sqrt{(25.4)} = 2\sqrt{3}.10 - 2\sqrt{3^2}\sqrt{25} = 2\sqrt{3}(10-5\sqrt{3})$.

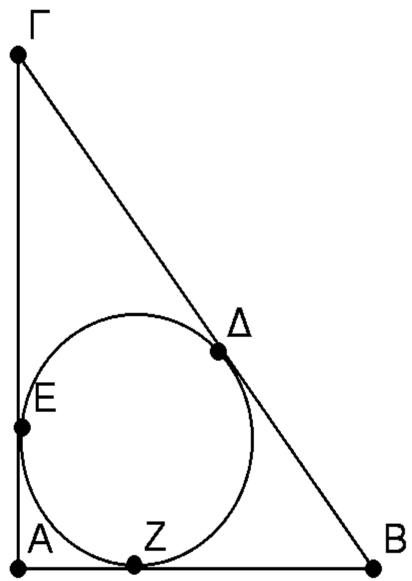
Ἡ ἐπίλυση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἔχει τὶς ρίζες της στὴν ἀρχαιότητα. Ὁ Ἀλ Χουαρίζμι τὸ ἀναφέρει σὲ ἐργασία του, ἀλλὰ ἡ προέλευσή του ἀνάγεται στὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρέα.

Τὸ γενικότερον δὲ πρόβλημα τῆς ἐγγραφῆς τετραγώνου σὲ δοθὲν τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς πλευρᾶς του, εὑρίσκεται στὸ βιβλίο τοῦ 1952: *Ἀσκήσεις Γεωμετρίας (Ἰησουϊτῶν).*

Ἐπίσης μία χρήσιμη μέθοδος διδασκαλίας τῆς κατασκευῆς αὐτῆς ἐκτίθεται λεπτομερῶς στὸ βιβλίο τοῦ G. Polya, *Πῶς νὰ τὸ λύσω,* στὶς σελίδες 51- 53.

Στὸ χειρόγραφό μας βέβαια, ὁ συγγραφέας δὲν θέτει θέμα κατασκευῆς ἐγγεγραμμένου τετραγώνου σὲ δοθὲν τρίγωνο, ἀλλὰ μόνον ὑπολογισμοῦ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἤδη ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

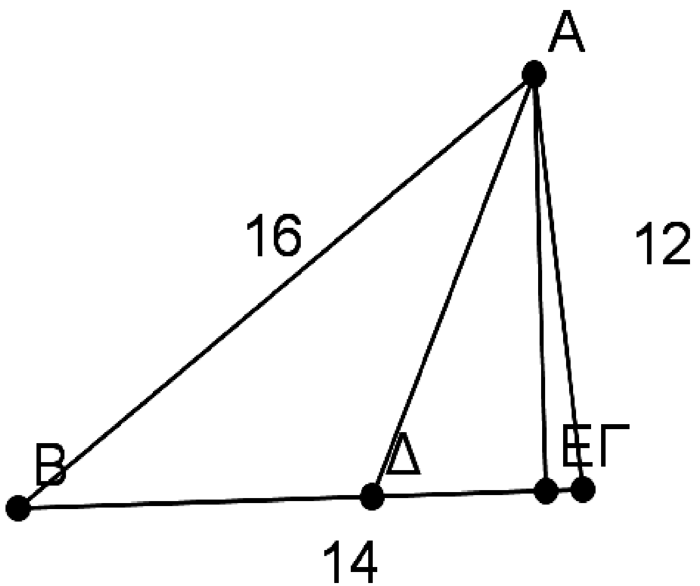
κεφ. 179. (ροθ). Ὑπολογισμὸς διαμέτρου καὶ περιμέτρου κύκλου ἐγγεγραμμένου σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο πλευρῶν 3, 4, καὶ 5 σπιθαμῶν.



- Ὁ συγγραφέας, ἀφοὺ ἐξηγήσει ἀναλυτικὰ τὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ κάθε πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες, ἐφαρμόζοντας τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα 3 φορές, προσθέτει τὶς δύο κάθετες πλευρὲς καὶ βρίσκει 3+4= 7. Στὴ συνέχεια ἀφαιρεῖ τὸ 5 ἀπὸ τὸ 7 καὶ βρίσκει 2. Γράφει λοιπὸν πὼς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ 2.
- Σήμερα θὰ θέταμε χ= ΑΕ= ΑΖ, ψ= ΔΒ= ΒΖ, καὶ ζ= ΓΔ= ΓΕ, ὁπότε θὰ εἴχαμε: 2χ+2ψ+2ζ= 2τ, ὅπου τὸ τ συμβολίζει τὴν ἡμιπερίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Δηλαδὴ χ= τ-(ψ+ζ)= (3+4+5)/2-5= (3+4)/2-5/2= 7/2-5/2= 1, ὁπότε ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου θὰ ἦταν ἴση μὲ 1. Ἔτσι αἰτιολογοῦνται καὶ οἱ πράξεις ποὺ ἔχουν γίνει στὸ χειρόγραφο.

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

κεφ. 182. (ρπβ). Ὑπολογισμὸς τοῦ "ὕψους" (ἐννοεῖ τῆς διχοτόμου) ΑΔ, τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν ΑΒ= 16, ΑΓ= 12, καὶ ΒΓ= 14 σπιθαμές



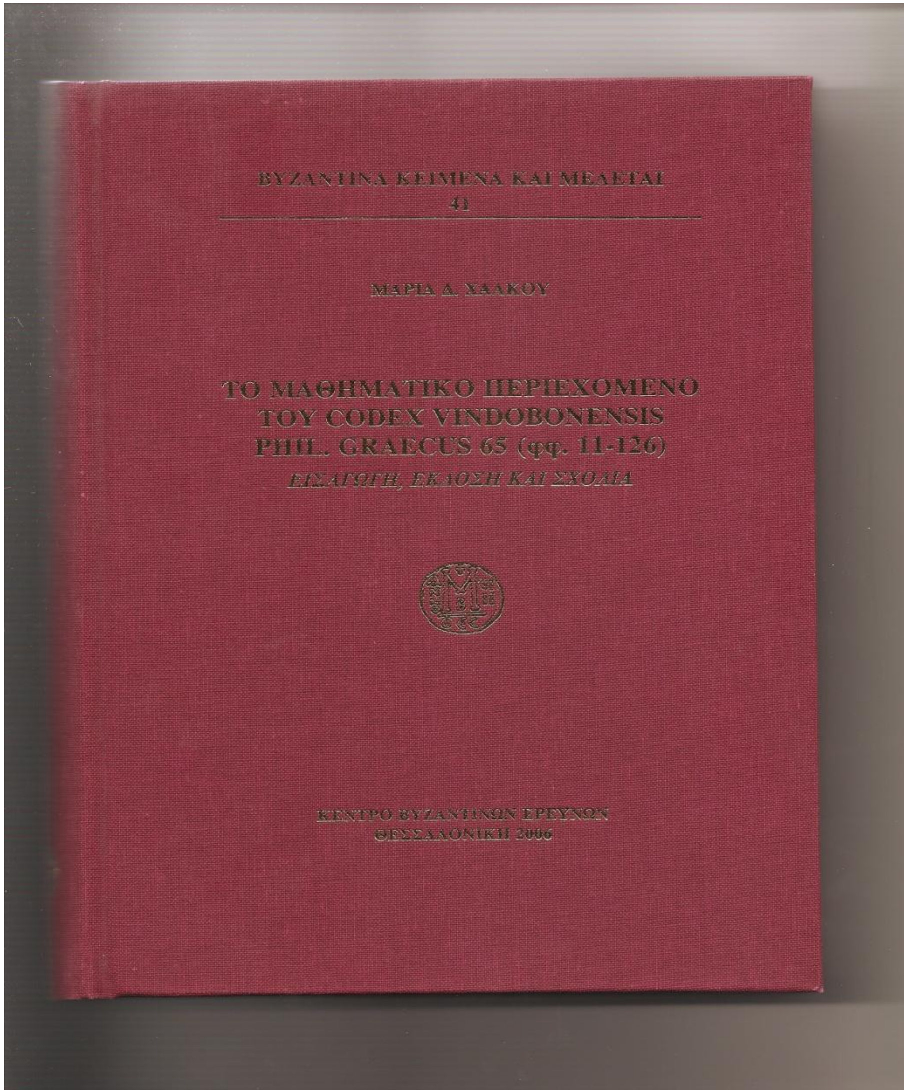
- Στὸ χειρόγραφο ἔχουν γίνει οἱ ἑξῆς πράξεις;
- 16/2= 8, BD= 8, 14^2 = 196, 196+8= 204, 2.2 = 4 (ὁ ἀριθμός 2 εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου), 204+4= 208, 16.16= 256, 256/4= 64, 208-64 = 144, καὶ τὸ ΑΔ εἶναι ἴσο μὲ τὴ ρίζα τοῦ 144, δηλαδὴ ἰσοῦται μὲ τὸ 12.
- Σύμφωνα μὲ αὐτὴν τὴν μέθοδο, ἐὰν ΑΒ= γ, ΑΓ= β, καὶ ΒΓ= α, τότε προκύπτουν τὰ ἑξῆς:
- $ΑΔ^2 = α^2 + γ/2 + 2.(γ-α) - γ^2/4$. Ἀλλὰ α = γ-2, ὁπότε $ΑΔ^2 = (3.γ^2 – 14.γ + 32)/4$ =
- $(3.16^2 – 14.16+32)/4 = (3.16^2 – 12.16)/4 = 144$, ἄρα ΑΔ=12

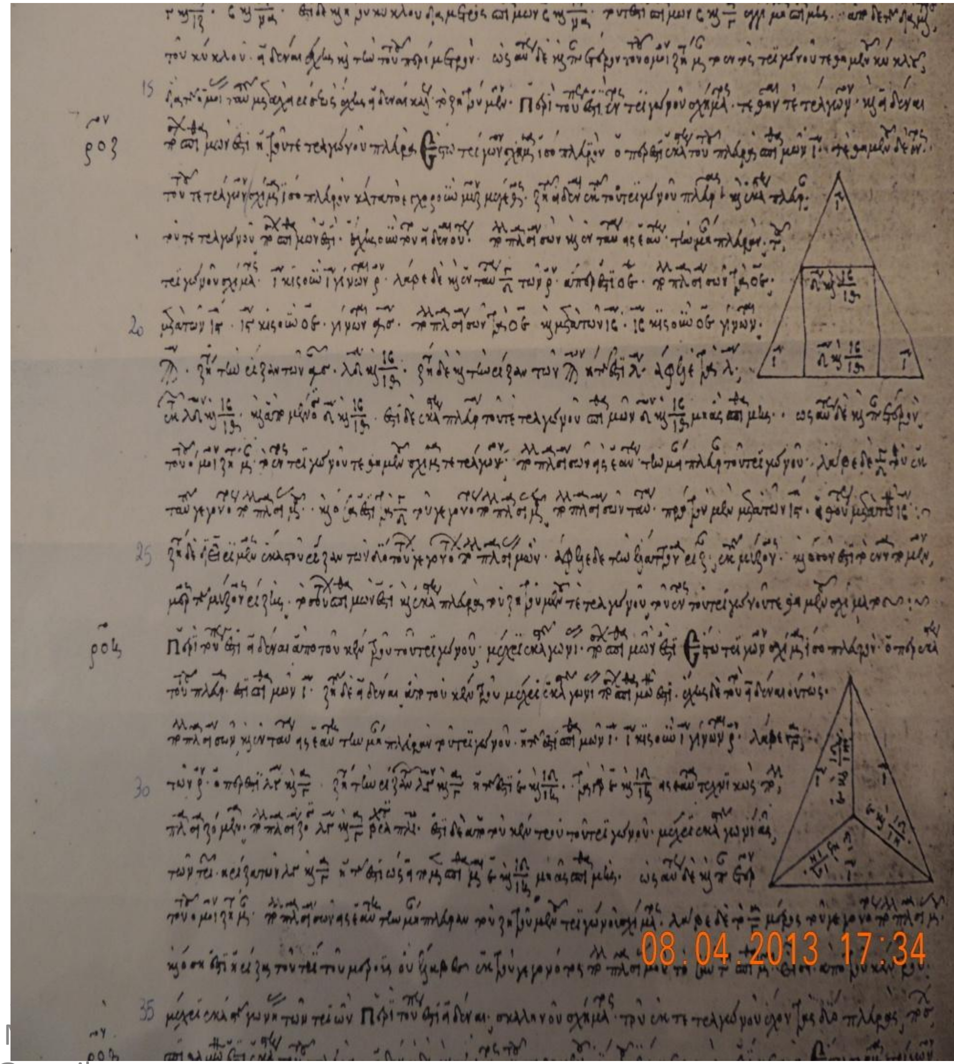
Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

- Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $ΑΔ^2 = β.γ\{1- α^2 /(β+γ)^2\}$, τὸν ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν $α= γ-2$ καὶ $β= γ-4$, θὰ ἔχουμε:
- $ΑΔ^2 = (3.γ^2 –12.γ)/4$, δηλαδὴ $ΑΔ^2 = (3.16^2-12.16)/4= 144$, ἄρα $ΑΔ= 12$.
- Οἱ δύο μέθοδοι συμφωνοῦν ὡς πρὸς τὸ ἀποτέλεσμα. Ἐπιπλέον παρατηροῦμε, ὅτι ὁ τύπος $ΑΔ^2= (3.γ^2-14.γ+32)/4$, στὸν ὁποῖο καταλήγουμε ἐφαρμόζοντας τὴν μέθοδο τοῦ συγγραφέα, λαμβάνει τὴν μορφὴ
- $ΑΔ^2= (3.γ^2-12.γ-2.γ+2.16)/4$, συνεπῶς
- $ΑΔ^2= (3.γ^2-12.γ)/4$, (ἐπειδὴ $γ= 16$, τότε $-2.γ+32= 0$).
- Διαπιστώνουμε, ὅτι κατ'οὐσίαν χρησιμοποιεῖ τοὺς ἴδιους τύπους μὲ αὐτοὺς ποὺ χρησιμοποιήσαμε καὶ ἐμεῖς, τοὺς ὁποίους ὅμως παρουσιάζει μὲ διαφορετικὴ μορφή.

Μαρία Δ. Χάλκου, Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών, Δρ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, mchalkou@gmail.com

Η παρουσίαση περιλαμβάνει υλικό από το βιβλίο: **Το Μαθηματικό Περιεχόμενο του Codex Vindobonensis phil. Graecus 65 του 15^{ου} αι.**
Το βιβλίο χαρακτηρίστηκε διεθνώς ως ΕΡΓΟ-ΠΗΓΗ για τα Μαθηματικά
(http://hollis.harvard.edu/) (εισάγετε όρο αναζήτησης Chalkou Maria)





@gmail.com

- **Ἐνδεικτική Βιβλιογραφία**

- Carl B. Boyer, *A History of Mathematics,* Princeton UP, 1968/1985.
- Vogel, *Fibonacci*.... K. Vogel, "Leonardo Fibonacci"*, DSB,* IV, 604-613.
- Heath, *Hist. Gr. Math.*, τόμ. I- II..... Th. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford UP, τόμ. I (1921), II (1981).
- Heron *Stereom.*, τόμ. V..... Heronis Alexandrini*, Stereometrica et de mensuris,* ed. J. Heiberg, Teubner Stutgard 1976.
- Hunger, *Βυζ. Λογ.*.....H. Hunger, *Βυζαντινὴ Λογοτεχνία* τόμ. I-III, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Ἀθήνα 1994.
- *Ἀσκήσεις Γεωμετρίας (Ἰησουϊτῶν),* μτφρ. Δ. Γκιόκα, τόμ. ΙΙΙ, ἐκδ. Α. Καραβία, [5]Ἀθῆναι 1952.

  W. R. Knorr, *"Archimedes and the Measurement of the circle. A new interpretation", AHES*, XV, N2 (1976), 115-140.
- Lefort et al., *Géom. fisc Byz*...... J. Lefort, R. Bondoux, J- Cl. Cheynet, J.- P. Grélois, V. Kravari, *Géometries du fisc Byzantin,* P. Lethielleux, Paris 1991.
- Mioni, *Εἰσ. Ἑλλ. Παλ.*.... E. Mioni, *Εἰσαγωγὴ στὴν Ἑλληνικὴ Παλαιογραφία*, ἐκδ. ΜΙΕΤ, Ἀθήνα 1994.
- G. Polya, *Πῶς νὰ τὸ λύσω,* μετάφρ. Ξανθὴ Ψυακκή, ἐπιμέλεια Τ. Πατρώνης, ἐκδ. Καρδαμίτσα, [3]Ἀθήνα 1998.
- Rose, *Ital. Ren. Math*..... P. L. Rose, *The Italian Renaissance of Mathematics*, Librairie Droz, Genève 1975.

  Ἀρχιμήδους Ἅπαντα, ἐκδ. Ε. Σταμάτη, ΤΕΕ, Ἀθῆναι 1974, μέρος Β', τόμ. Ι.
- Σταμάτη, *Κριτ. Βυζ. βιβλ. Ἀριθμ*...... Ε. Σταμάτη, *Κριτικὴ Βυζαντινοῦ βιβλίου Ἀριθμητικῆς* H. Hunger und Kurt Vogel (Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts), ἐκδ. Σίδερη, Ἀθήνα 1965.
- Smith, *Hist. Math.,* τόμ. I- II..... D. E. Smith, *History of Mathematics,* τόμ. I- II, Dover, New York 1958.
- V. d. Waerden, *Ἀφύπνιση*..... B. L. Van der Waerden, *Ἡ ἀφύπνιση τῆς Ἐπιστήμης*, Πανεπ. ἐκδόσεις Κρήτης, Ἡράκλειο 2000.
- Vincent, *Géom. prat. gr.*.... J. H. Vincent, À *la Géomètrie Pratique des Grecs*. Extrait des notices des Manuscrits, τόμ. XIX pt. 2, Imr. Impériale, Paris 1858.
- Μαρία Χάλκου, *Ἡ Μαθηματικὴ παιδεία καὶ ἡ ὁρολογία της στὸ Βυζάντιο κατὰ τὸν Βιενναῖο Ἑλλ. Φιλ. Κώδικα 65,* Ἑῷα καὶ Ἑσπέρια, Ἀθήνα 2001- 2003, τόμ. 5, σελ. 51- 62.
- Μαρία Χάλκου, *Τὸ Μαθηματικὸ Περιεχόμενο τοῦ Codex Vindobonensis phil. Gr. 65, Εἰσαγωγή, Ἔκδοση καὶ Σχόλια*, ἐκδ. Κέντρου Βυζαντινῶν Ἐρευνῶν τοῦ ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη 2006.