Κωνικές Τομές - Θεωρία

Τα θεωρήματα που μας οδήγησαν μετά από 2.500 χρόνια στον τέταρτο ορισμό των κωνικών τομών

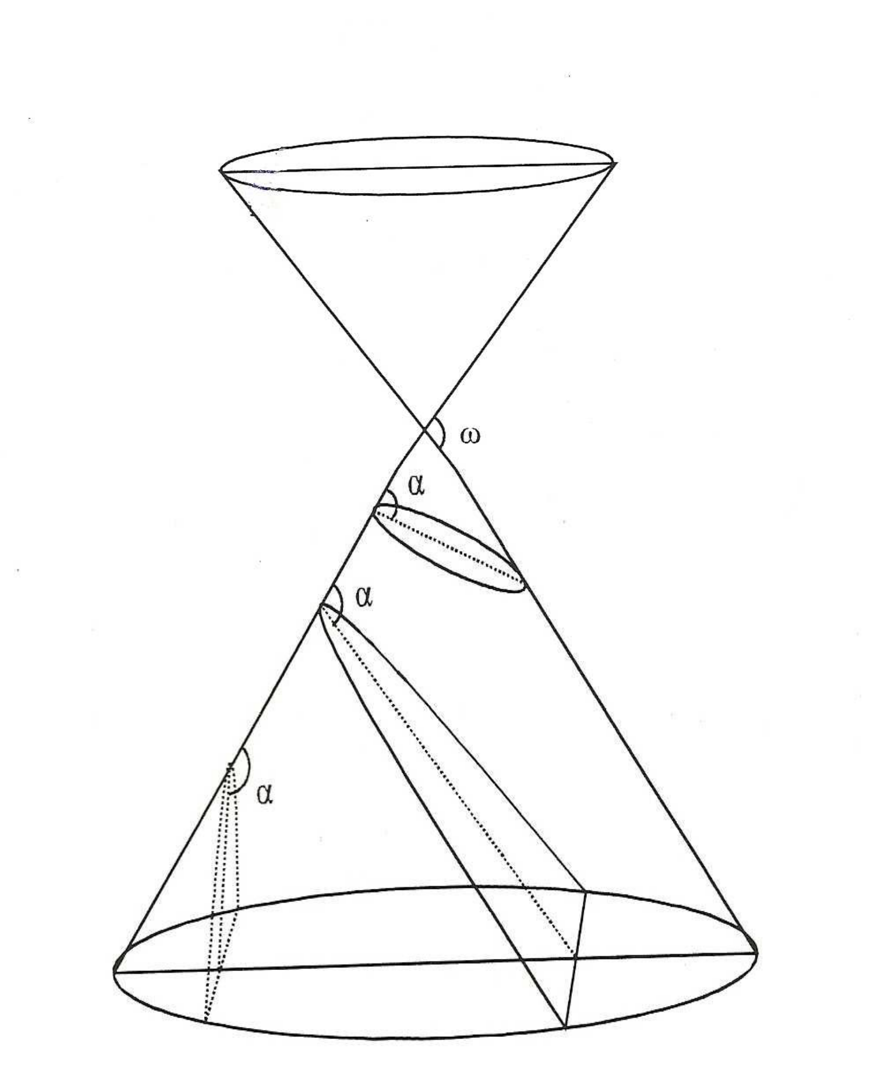
Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών,
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
mchalkou@gmail.com

14/4/2013

ΘΕΩΡΙΑ

- Για τις καμπύλες της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής θα θεωρήσουμε ότι τα σημεία F, F1, F2 των σχημάτων με τις ενδείξεις Α,Β,Γ των διαφανειών 7,10,11 είναι σταθερά, και επιπλέον ότι τα F1, F2 ισαπέχουν από το σημείο Ο. Με αυτές τις προϋποθέσεις θα διατυπωθεί και θα δειχθεί ότι ισχύει το αντίστροφο της οπτικής τους ιδιότητας. Έτσι θα έχουμε τη δυνατότητα μετά από περίπου 2500 χρόνια από όταν διατυπώθηκαν οι 3 πρώτοι ορισμοί, να χρησιμοποιήσουμε την οπτική ιδιότητα σαν τον τέταρτο ορισμό των κωνικών τομών
- Τα νέα θεωρήματα προέκυψαν κατά την εκπόνηση της Διπλωματικής Εργασίας της συγγραφέα, για την απόκτηση του Μ.Δ.Ε. στη ¨Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών¨. Η εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του κ. Ιωάννη Αραχωβίτη, Μέλους του Σώματος Ομοτίμων Καθηγητών του ΕΚΠΑ, και με μέλη της Τριμελούς Επιτροπής τον Καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ κ. Σταύρο Παπασταυρίδη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του ιδίου Τμήματος κ. Αθανάσιο Χρυσάκη.
- Βλ. σε: Μαρία Χάλκου, *¨Κωνικές τομές- Ιστορικό- Θεωρία¨. Μαθηματική Επιθεώρηση* της ΕΜΕ, 48 (1997), σελ. 32- 39.
- Βλ. σε: Ι. Λ. Αραχωβίτη, *Τεκμηρίωση Διδασκαλίας, εκδ. Συμμετρία, Αθήνα 1998, σελ. 117*
- *Βλ. και σε*: Μαρία Χάλκου, *Κωνικές τομές: Εισαγωγή-Θεωρία, 4^{ος} ορισμός, εφαρμογές, Αθήνα 2010.*

Ο πρώτος ορισμός των κωνικών τομών



- Η καμπύλη θα λέγεται **<u>έλλειψη</u>** αν γων α<γων ω,

  <u>παραβολή</u> αν γων α= γων ω, και **<u>υπερβολή</u>** αν γων α>γων ω, όπου ω είναι η

  εξωτερική γωνία του κώνου. Στην ειδική δε περίπτωση που γων α= γων ω/2, η
- έλλειψη γίνεται κύκλος.

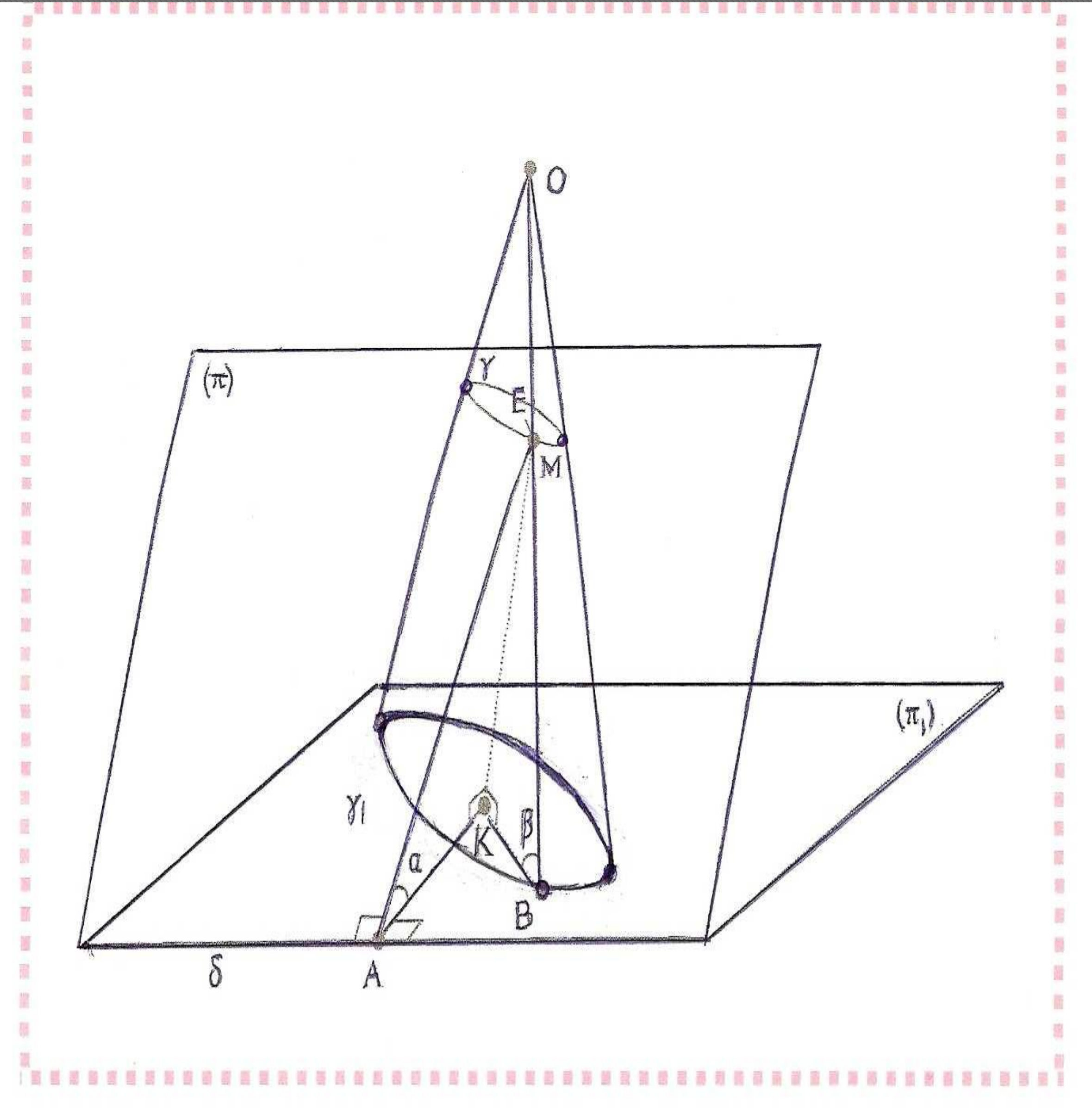
$2^{ος}$ Ορισμός

Έλλειψη ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία η απόλυτη τιμή του αθροίσματος των αποστάσεων από 2 δοθέντα σημεία -του ιδίου επιπέδου με αυτό των προαναφερθέντων σημείων- είναι σταθερή.

- **Υπερβολή** ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου για τα οποία η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από 2 δοθέντα σημεία -του ιδίου επιπέδου με αυτό των προαναφερθέντων σημείων- είναι σταθερή.
- **Παραβολή** ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που απέχουν το ίδιο από δοθέν σημείο και δοθείσα ευθεία αυτού. Το συγκεκριμένο σημείο καλείται ¨εστία¨ και η συγκεκριμένη ευθεία ¨διευθετούσα¨.

Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών,
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
mchalkou@gmail.com

3ος Ορισμός

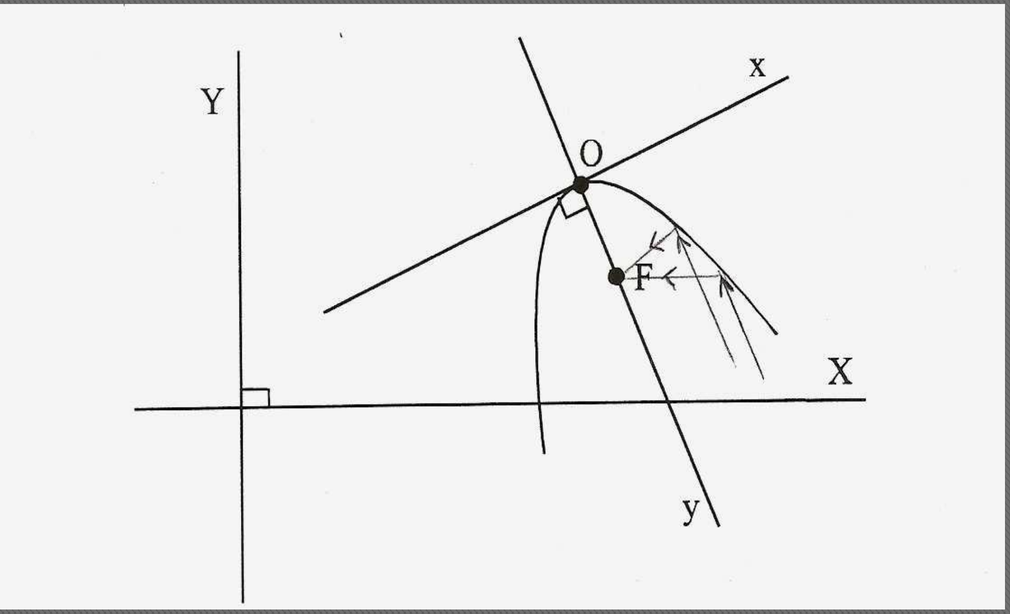


- Ο σταθερός λόγος e των αποστάσεων του τυχόντος σημείου M της κωνικής τομής από την εστία E και τη διευθετούσα δ λέγεται εκκεντρότητα¨ της

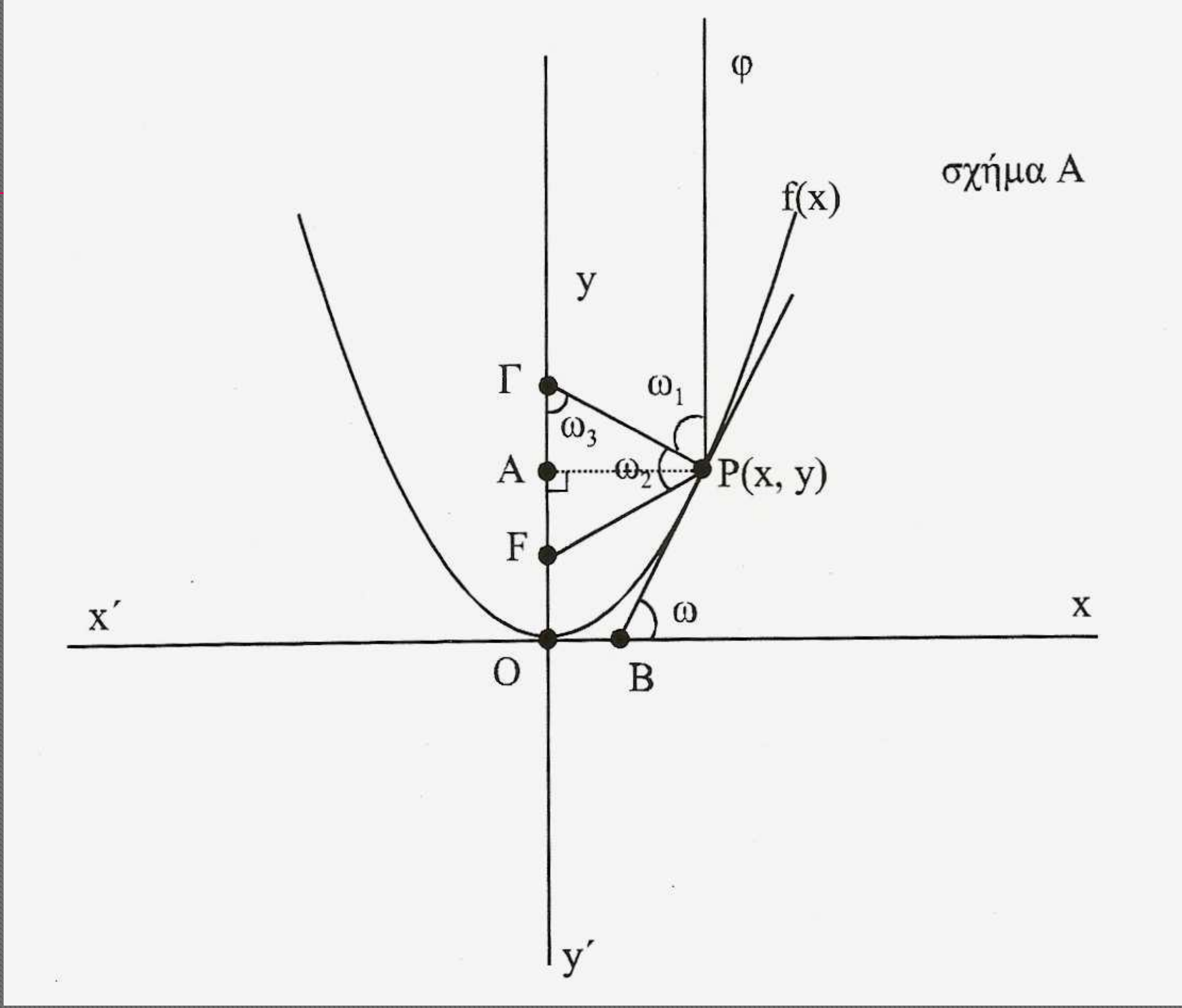
  κωνικής τομής. Επιπλέον, αν e<1, e= 1, e>1, τότε η κωνική τομή θα ονομάζεται αντίστοιχα έλλειψη, παραβολή και υπερβολή.
- Η έλλειψη δε και η παραβολή έχουν όλα τα σημεία τους στο ημιεπίπεδο

Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών, mchalkou@gmail.com

4ος Ορισμός παραβολής



- Θωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, και την καμπύλη Y=g(X), η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Αν υπάρχει σημείο F και δέσμη παραλλήλων ακτίνων, οι οποίες ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες να διέρχονται από το F, τότε και μόνον τότε η καμπύλη θα είναι παραβολή με εστία το F. Επεξήγηση: Έστω O το σημείο τομής της καμπύλης με την ακτίνα που διέρχεται από το F. Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων που έχει θετικό ημιάξονα των y την OF, και άξονα των x την κάθετη της Oy στο O. Τότε προκύπτει η παραβολή y=f(x) με εστία το σημείο F, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



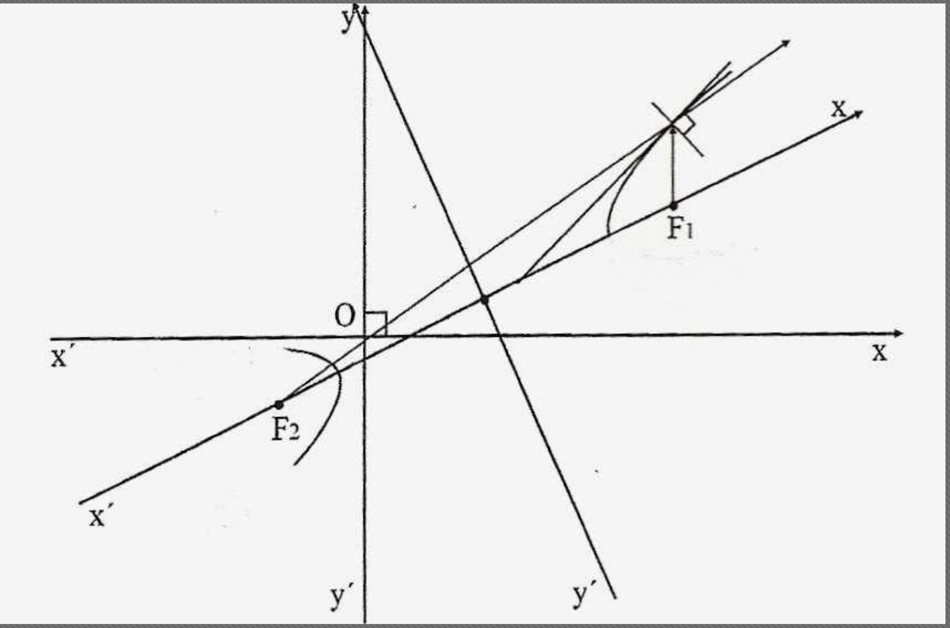
Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών,
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
mchalkou@gmail.com

Ο 4ος ορισμός της παραβολής προέκυψε ως συνέπεια του εξής θεωρήματος

- ΘΕΩΡΗΜΑ
- Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, και την καμπύλη Y=g(X), η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Αν υπάρχει σημείο F και δέσμη

  παραλλήλων ακτίνων, οι οποίες ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται από το F, τότε η καμπύλη θα είναι παραβολή με εστία το σημείο F.
- ΑΠΟΔΕΙΞΗ
- Διαβάστε ΕΔΏ (σελίδα 57)

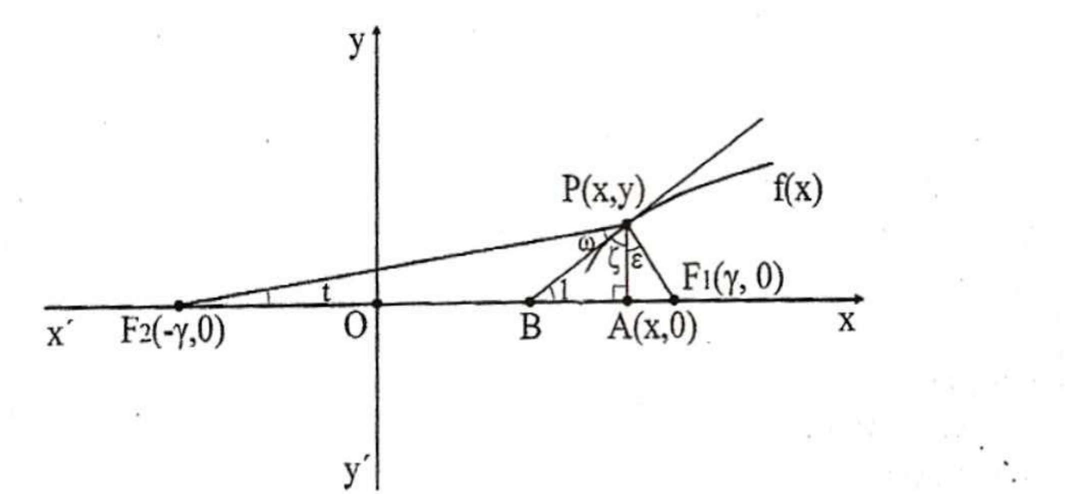
4ος Ορισμός υπερβολής



- Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F1, F2, και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το F1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται προεκτεινόμενες από το F2, τότε και μόνον τότε η καμπύλη θα είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία F1, F2.
- Επεξήγηση:
- Θεωρούμε ως άξονα των x την F1F2, και άξονα των y τη μεσοκάθετο του F1F2. Τότε η εξίσωση της υπερβολής θα είναι: y=f(x), όπως φαίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας

Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών,
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
mchalkou@gmail.com

Ο $4^{ος}$ ορισμός της υπερβολής προέκυψε ως συνέπεια του εξής θεωρήματος



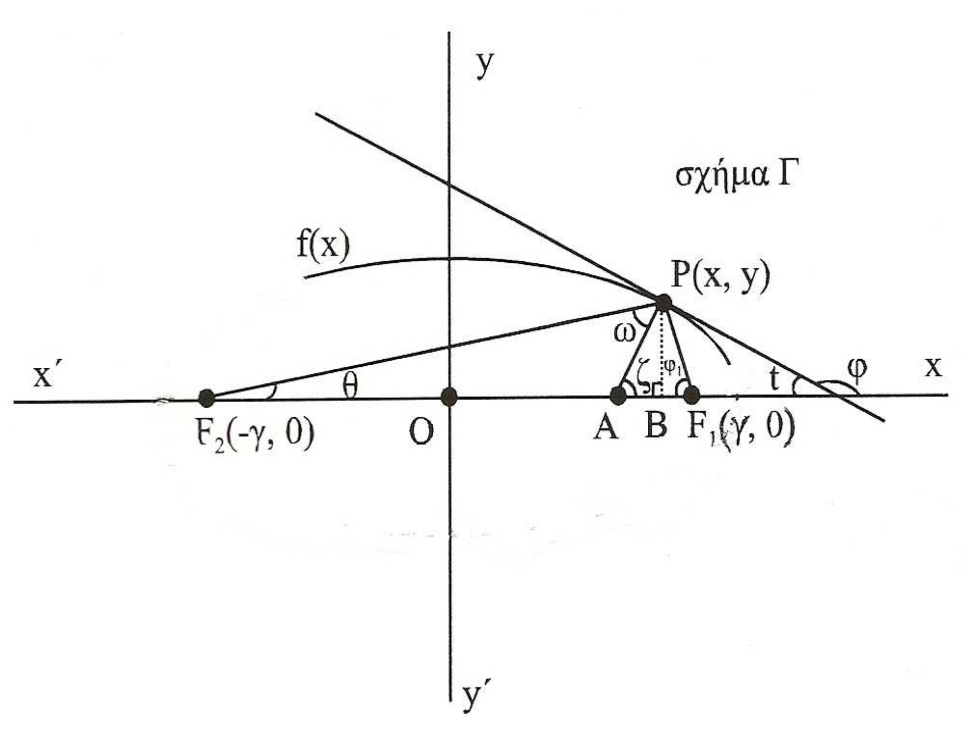
Σχήμα B

- Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) η οποία είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F1, F2, και κεντρική

  δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το F1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται προεκτεινόμενες από το F2, τότε η καμπύλη θα είναι
- υπερβολή με εστίες τα σημεία F1, F2.
- Διαβάστε την απόδειξη εδώ
- (σελ. 80)

Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών,
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών,
mchalkou@gmail.com

$4^{ος}$ Ορισμός έλλειψης



- Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F1, F2 και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το σημείο F1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται από το F2, τότε και μόνον τότε η καμπύλη θα είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία F1, F2.
- Επεξήγηση: Θεωρούμε την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία F1, F2 ως άξονα των x, και τη μεσοκάθετη του F1F2 ως άξονα των y. Τότε η έλλειψη θα έχει εξίσωση $y=f(x)$

Μαρία Δ. Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών, σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών, mchalkou@gmail.com

Ο 4ος ορισμός της έλλειψης προέκυψε ως συνέπεια του εξής θεωρήματος

- Έστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και καμπύλη Y=g(X) παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο της. Εάν υπάρχουν σημεία F1, F2 και κεντρική δέσμη ακτίνων που ξεκινούν από το F1 και ανακλώμενες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες διέρχονται από το F2 τότε η καμπύλη θα είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία F1, F2.

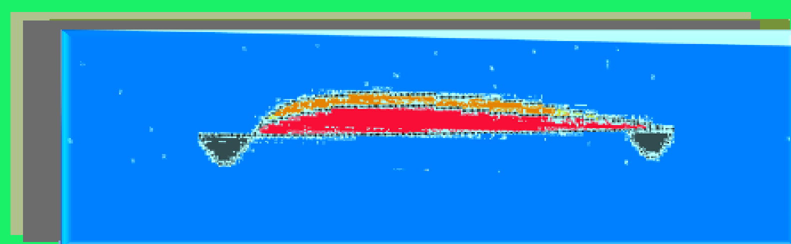
- Για την απόδειξη του θεωρήματος διαβάστε εδώ (σελ. 83)

- Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι οι ορισμοί αυτοί είναι πολύ σημαντικοί από παιδαγωγικής άποψης επειδή μας παρέχουν τη δυνατότητα να εισαγάγουμε το μεγαλύτερο μέρος του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή τον Διαφορικό Λογισμό, παρακάμπτοντας τη δυσκολονόητη έννοια του ορίου.
- Παραπέμπουμε σε:
- Μία συνάρτηση f(x) είναι παραγωγίσιμη στο x_0, εάν και μόνον εάν υπάρχει συνάρτηση φ(x) συνεχής στο x_0, τέτοια ώστε $f(x)=f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)$. Το $\phi(x_0)$ θα είναι η παράγωγος της f στο x_0, δηλαδή $\phi(x_0) = f\,'(x_0)$.
- Βλ. σε: C. Caratheodory's, *Funktionentheorie, Ester Band, Pub. Verlag Birkhauser, Basel 1950, pp. 288* [III.6].
- Βλ. και σε: 1) E. Hairer- G. Wanner*, Analysis by its History, Pub.*
- Springer- Verlag, N. York 1996*,* p. 236. 2) Stephen Kuhn*, The Derivative a la Caratheodory, The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1 (Jan.,* 1991), pp. 40 - 44*, Pub.:Mathematical Association of America, (Stable URL:*
- [http://www.jstor.org/stable/2324035).](http://www.jstor.org/stable/2324035)

ΜΑΡΙΑ Δ. ΧΑΛΚΟΥ
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικού Τμήματος Ε.Κ.Π.Α.
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Α΄ Αθήνας

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

- ΕΙΣΑΓΩΓΗ
- ΘΕΩΡΙΑ—4ος ΟΡΙΣΜΟΣ
- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ



ΑΘΗΝΑ 2010