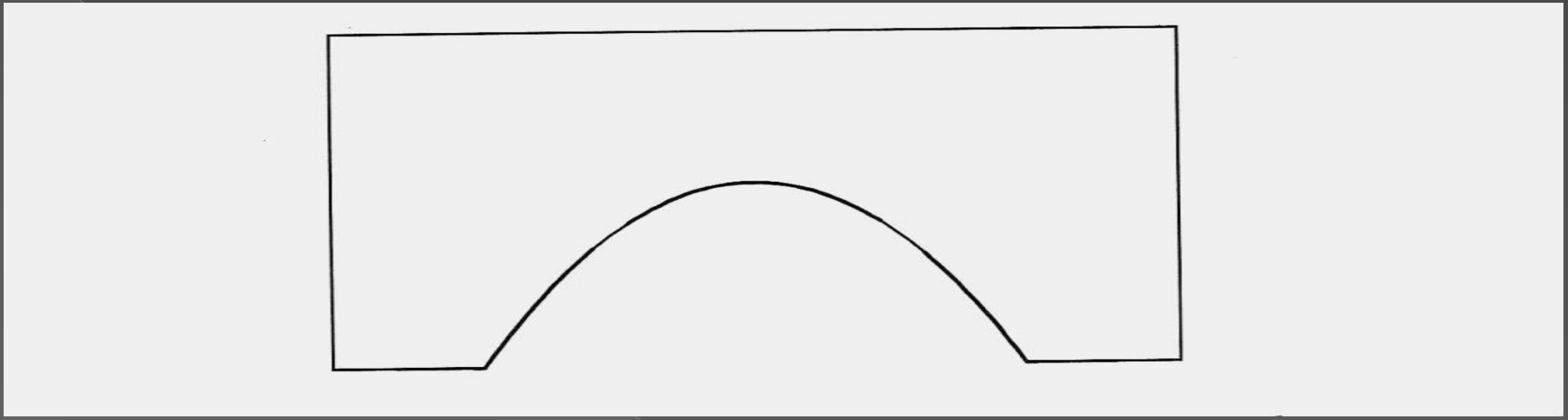
Εφαρμογές των κωνικών τομών

Η χρησιμότητά τους στη διδασκαλία

Μαρία Χάλκου, Δρ. Μαθηματικών, Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών, mchalkou@gmail.com
15/4/2013

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

- Η κατασκευή των παραβολικών τηλεσκοπίων βασίζεται στην οπτική ιδιότητα της παραβολής.
- Όμοια και η κατασκευή των Ραντάρ.
- Το ίδιο ισχύει για τα φανάρια των αυτοκινήτων.
- Η μέθοδος της λιθοθρυψίας βασίζεται στην οπτική ιδιότητα της έλλειψης, και εφαρμόζεται ως εξής: Η εκπομπή των ακτίνων γίνεται από τη μία εστία της έλλειψης, ενώ το μέρος του σώματος του ασθενούς, το οποίο θέλουμε να επιδράσουν οι ακτίνες τοποθετείται στην άλλη εστία.
- Στη βαλλιστική, η τροχιά των βλημάτων όταν η βολή είναι επισκυπτική, είναι παραβολή, εφόσον βέβαια δεν υπολογίζεται η αντίσταση του αέρα.
- Οι πλανήτες κατά την κίνησή τους γύρω από τον ήλιο διαγράφουν ελλειπτική τροχιά της οποίας η μία εστία είναι ο ήλιος.
- Οι ζωγράφοι όταν αναπαριστούν τον κύκλο με προοπτική χρησιμοποιούν την καμπύλη της έλλειψης.
- Τα υπερβολικά παραβολοειδή που χρησιμοποιούνται στις στέγες αλλά και σε τρούλους οικοδομημάτων, σαν επιφάνειες κατασκευάζονται σχετικά εύκολα, γιατί είναι ευθειογενείς, που σημαίνει πως το καλούπωμα γίνεται με συνηθισμένες σανίδες οικοδομής.

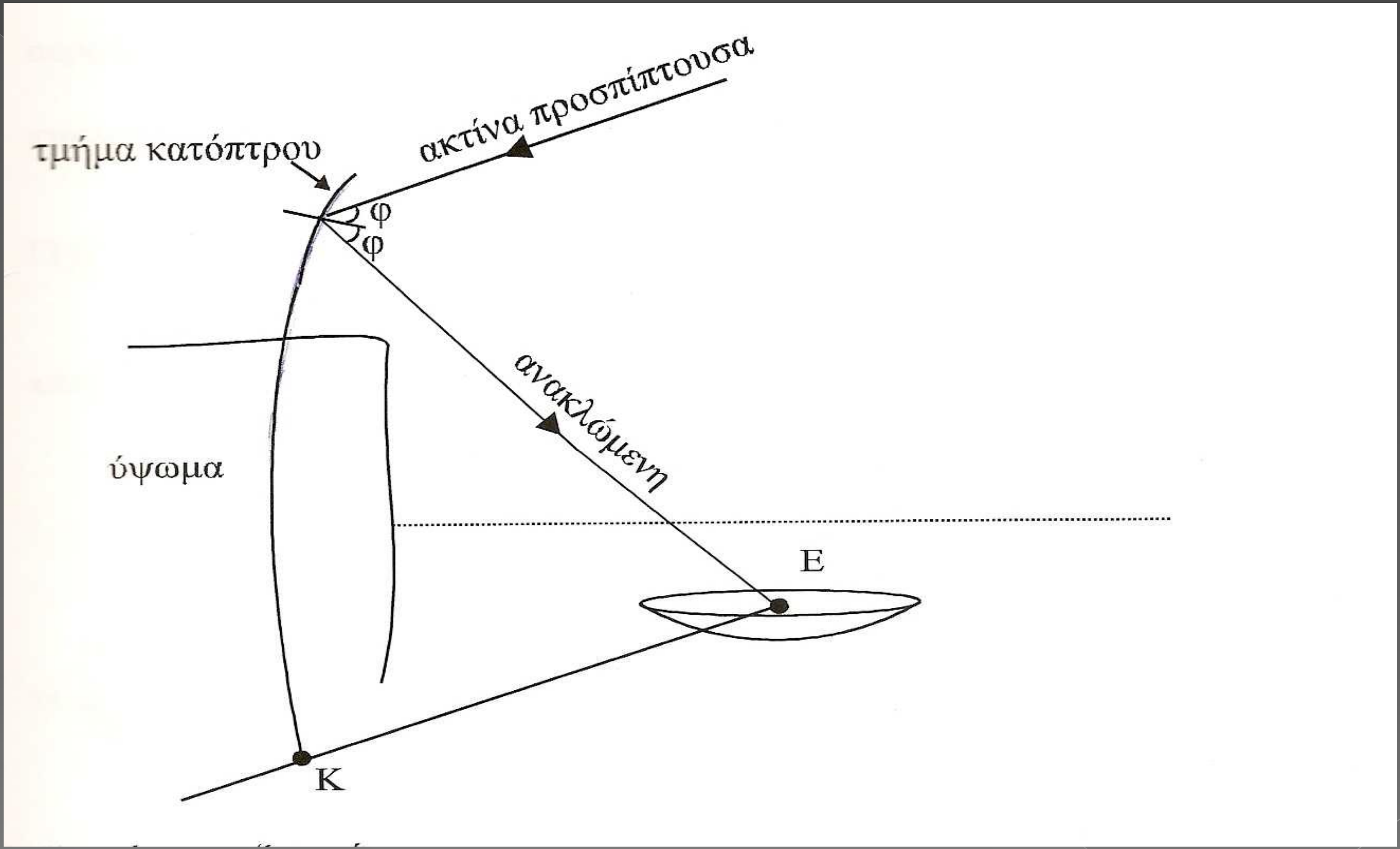


ΠΕΤΡΙΝΕΣ ΓΕΦΥΡΕΣ

Οι πέτρινες γέφυρες έχουν ως επί το πλείστον μορφή παραβολής γιατί, όταν διέρχεται το φορτίο, ασκούνται σ' αυτό δυνάμεις εφελκυσμού, και η παραβολή τείνει να τις μετατοπίζει στα άκρα, όπου η κατασκευή είναι ενισχυμένη.

- Στην κατασκευή των κεραιών εφαρμόζεται η οπτική ιδιότητα της Παραβολής.
- Το ίδιο και στην κατασκευή των ηλεκτρικών θερμαστρών
- Σχετικά με το ιστορικό **πρόβλημα της καύσης του Ρωμαϊκού στόλου**, πιθανολογείται ότι χρησιμοποιήθηκαν παραβολικά κάτοπτρα στραμμένα προς το πλοίο με τέτοιον τρόπο, ώστε κάποιο επιλεγμένο σημείο του πλοίου να θεωρείται ως εστία της παραβολής. Λόγω της μεγάλης απόστασης θεωρούμε ότι οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες μεταξύ τους, οπότε, αν τα κάτοπτρα είναι τοποθετημένα έτσι ώστε οι ακτίνες του ήλιου να είναι παράλληλες με τον κύριο άξονα της παραβολής, τότε ανακλώμενες θα διέρχονται από την εστία, και έτσι θα επιτευχθεί η καύση του πλοίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι το εγχείρημα έχει επαληθευτεί το 1973 στη Σαλαμίνα από τον ελληνικής καταγωγής μηχανικό Ιωάννη Σακά, ο οποίος χρησιμοποίησε σειρά επιπέδων και επιχαλκωμένων κατόπτρων τοποθετημένων έτσι ώστε να σχηματίζουν παραβολή.

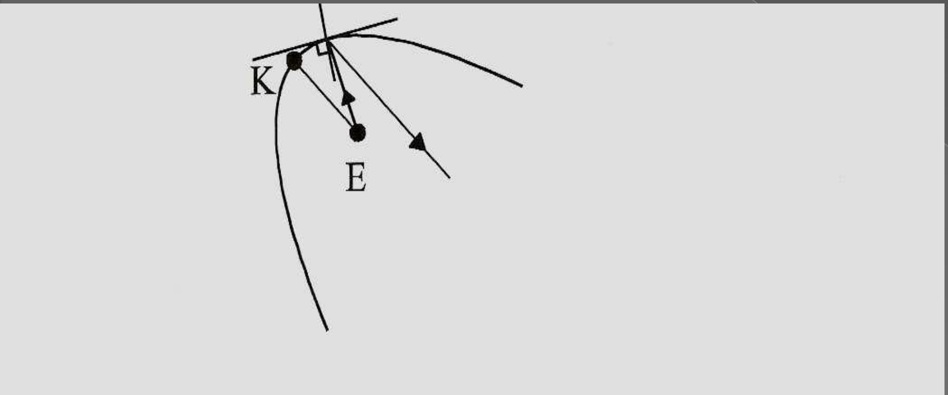
(Βλ.:Ι. Σακά, *Ο Αρχιμήδης έκαυσε τον στόλον των Ρωμαίων δι' επιπέδων κατόπτρων, Τεχνικά Χρονικά, Σεπτέμβριος 1973, σελ. 771- 778. Βλ. και σε*: P. Thuillier, *Τα εμπρηστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη, Περισκόπιο της* Επιστήμης, αρ. 22 Σεπτέμβριος 1979, σελ. 9 – 19. Βλ. και σε: Χ. Δ. Λάζου, *Μηχανική και Τεχνολογία στην Αρχαία Ελλάδα, εκδ. Αίολος,* [3]Αθήνα 1993, σελ. 85.)


τμήμα κατόπτρου
ακτίνα προσπίπτουσα
φ
φ
αναλώμενη
ύψωμα
Ε
Κ

Το πρόβλημα της καύσης του Ρωμαϊκού στόλου

- Το πείραμα αυτό πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια του μαθηματικού Ε. Σταμάτη, τα δε κάτοπτρα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν επιχαλκωμένα ώστε να ομοιάζουν με τα κάτοπτρα που υποτίθεται ότι είχε στη διάθεσή του ο Αρχιμήδης.
- Το πείραμα επανέλαβαν το 2005 με την ίδια επιτυχία επιστήμονες του Μ.Ι.Τ., οι οποίοι χρησιμοποίησαν 100 χάλκινα κάτοπτρα και πέτυχαν σε ελάχιστα λεπτά να κάψουν ομοίωμα ρωμαϊκής γαλέρας.

Τζάκια



- Κατά την κατασκευή ορισμένων τζακιών η επιφάνεια στο βάθος της εστίας μπορεί να είναι τμήμα παραβολικής επιφάνειας, ώστε να επιτυγχάνεται μετάδοση της θερμότητας και σε σημεία κοντά στο πάτωμα.

Οι πτέρυγες του αεροπλάνου

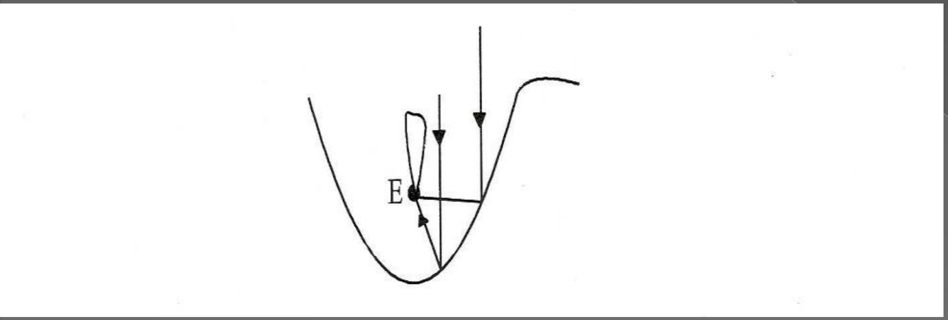
- Σχετικά με τις πτέρυγες του αεροπλάνου, είναι γνωστό ότι στο σχήμα τους

  περιλαμβάνονται ελλειπτικά τμήματα, επειδή έχει δειχθεί ότι για δοθέν εκτόπισμα, έτσι επιτυγχάνεται η ελάχιστη οπισθέλκουσα δύναμη.

Οι πτέρυγες του αεροπλάνου

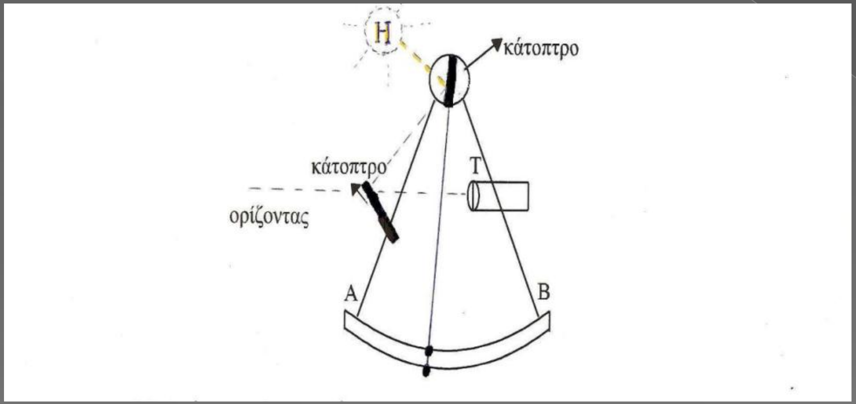
- Προκύπτει ότι η διανομή της κυκλοφορίας κατά το άνοιγμα της πτέρυγας είναι ελλειπτική. Επειδή δε και η τοπική δυναμική άνωση είναι ανάλογη της κυκλοφορίας, τότε η φόρτιση της πτέρυγας, δηλαδή το κλάσμα με αριθμητή την τιμή της στοιχειώδους άνωσης και παρανομαστή την τιμή του εμβαδού της στοιχειώδους πτέρυγας, είναι επίσης ελλειπτική.
- (Βλ. : Γ. Μπεργελέ, *Αεροδυναμική υποηχητικού αεροσκάφους, εκδ. Παπασωτηρίου,* Αθήνα 1995, σελ. 186- 204.)

Ολυμπιακή φλόγα



- Για να δημιουργηθεί η Ολυμπιακή φλόγα χρησιμοποιείται αντικείμενο το οποίο έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα , στο οποίο οι ακτίνες του ήλιου προσπίπτουν παράλληλα και ανακλώμενες διέρχονται από την εστία Ε. Η φλόγα ανάβει σχετικά εύκολα με τη χρήση ίσως κάποιου βοηθητικού εύφλεκτου υλικού.

Προσδιορισμός στίγματος πλοίων



- Είναι γνωστό ότι η γωνιακή απόσταση δύο αντικειμένων μετριέται με ένα φορητό όργανο τον ¨εξάντα¨, και η όλη διαδικασία στηρίζεται στην εξής αρχή:
- ***Όταν φωτεινή ακτίνα ανακλάται διαδοχικά επί δύο επιπέδων κατόπτρων τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία φ, τότε η γωνία των διευθύνσεων αρχικής και τελικής ακτίνας είναι ίση προς 2φ***.
- *Στον εξάντα βασικό ρόλο κατέχει το* τηλεσκόπιο Τ.

Οι ασπίδες των αρχαίων Ελλήνων

- Με βάση τα αρχαιολογικά ευρήματα και μετά από μελέτες ειδικών επιστημόνων εξάγονται ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με τη γεωμετρία της ασπίδας που χρησιμοποιούσαν στους πολέμους οι αρχαίοι Έλληνες. Βάσει λοιπόν αξιόπιστων στοιχείων γνωρίζουμε σήμερα ότι το σχήμα της γενέτειρας της διατομής μιας ασπίδας ήταν έλλειψη με μήκος μεγάλου και μικρού ημιάξονα 300 και 120 χιλ. αντίστοιχα.
- Επιπλέον επιβεβαιώνεται ότι οι κατασκευαστές ασπίδας κατά την αρχαιότητα είχαν όλες τις απαραίτητες γνώσεις των δυναμικών- μηχανικών ιδιοτήτων των πολύστρωτων σύνθετων κατασκευών, που αφορούν στη σύγχρονη τεχνολογία.
- (Βλ. : Σ. Α. Παϊπέτη, *Η άγνωστη τεχνολογία στον Όμηρο, εκδ. Έσοπτρον, Αθήνα,* 2005, *σελ.* 170- 176)

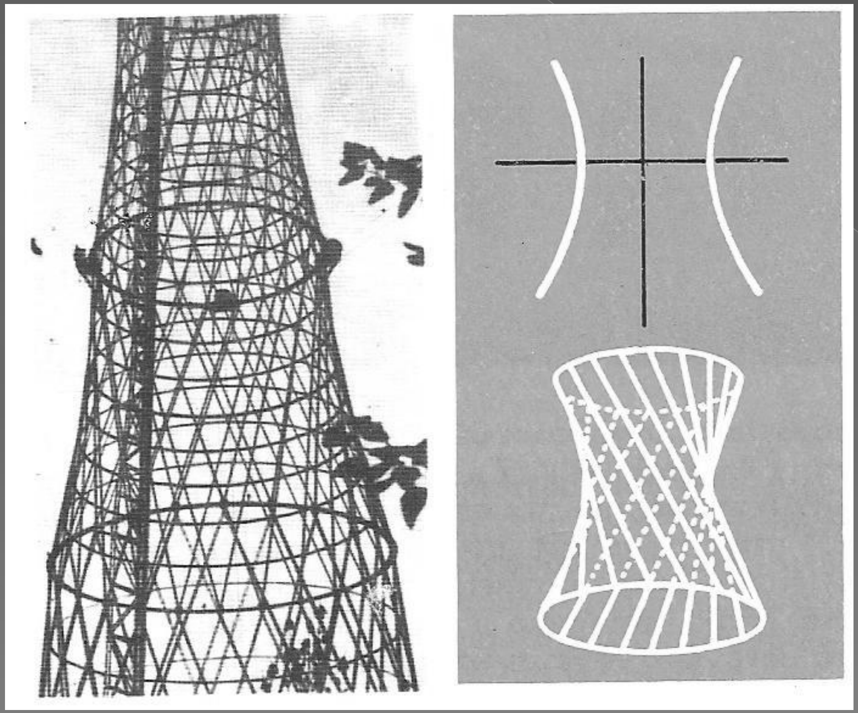
Διπλασιασμός του όγκου του κύβου

- Ένα πρόβλημα γνωστό από την αρχαιότητα είναι αυτό της κατασκευής κύβου με όγκο διπλάσιο του όγκου κύβου δοθείσης ακμής α. Ζητείται λοιπόν το μέγεθος x της ακμής του νέου κύβου, ώστε να ικανοποιείται η σχέση: $x^3=2a^3$, όπου α η ακμή του δοθέντος κύβου.
- Κατ' ουσία ζητάμε μεγέθη x, y τέτοια ώστε $a/x=x/y=y/(2a)$ (γιατί $x^2=ay$, $y^2=2ax$, $x^2=a\sqrt{(2a.x)} \Rightarrow x^4=a^2.2ax \Rightarrow x^3=2a^3$), οπότε προκύπτει:
- (I) $y^2=2ax$, και
- $xy=2a^2 \Rightarrow y=2a^2/x$ (II).
- Η καμπύλη (I) είναι παραβολή και η (II) υπερβολή
- (Μαρία Χάλκου, *Κωνικές Τομές*, Αθήνα 2010, κεφ. Ιστορικό Κωνικών τομών, σελ. 3)

Λύση εξισώσεων με νομογραφήματα

- Κατά τη λύση εξισώσεων ανωτέρου βαθμού χρησιμοποιείται η ¨Μέθοδος με Νομογραφήματα¨. Σύμφωνα με αυτή, για να προσδιορίσω τις λύσεις μιας ελλιπούς εξίσωσης 4ου π. χ. βαθμού σχεδιάζω μια παραβολή και μια περιφέρεια κύκλου, βρίσκω τις τεταγμένες y των κοινών τους σημείων, και λαμβάνοντας τα y/t βρίσκω τις ρίζες. Με κατάλληλη επιλογή του t λαμβάνω κύκλο που δίνει καθαρά τα σημεία τομής των κωνικών τομών, ώστε με καλή προσέγγιση να βρίσκονται τα y, από τα οποία τελικά προκύπτουν οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης 4ου βαθμού.
- Έστω ότι δίδεται η εξίσωση: $υ^4 + α΄υ^3 + β΄υ^2 + γ΄υ + δ΄ = 0$.
- Θέτω $υ = z – α΄/4$, οπότε στην εξίσωση δεν θα υπάρχει τριτοβάθμιος όρος, και κατά συνέπεια θα μπορεί να λυθεί με την προαναφερθείσα μέθοδο.
- (Μπορείτε να διαβάσετε τη συνέχεια στο ηλεκτρονικό βιβλίο: Μαρία Χάλκου, *Κωνικές Τομές*, Αθήνα 2010, σελ. 81)

Κεραίες εκπομπής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων



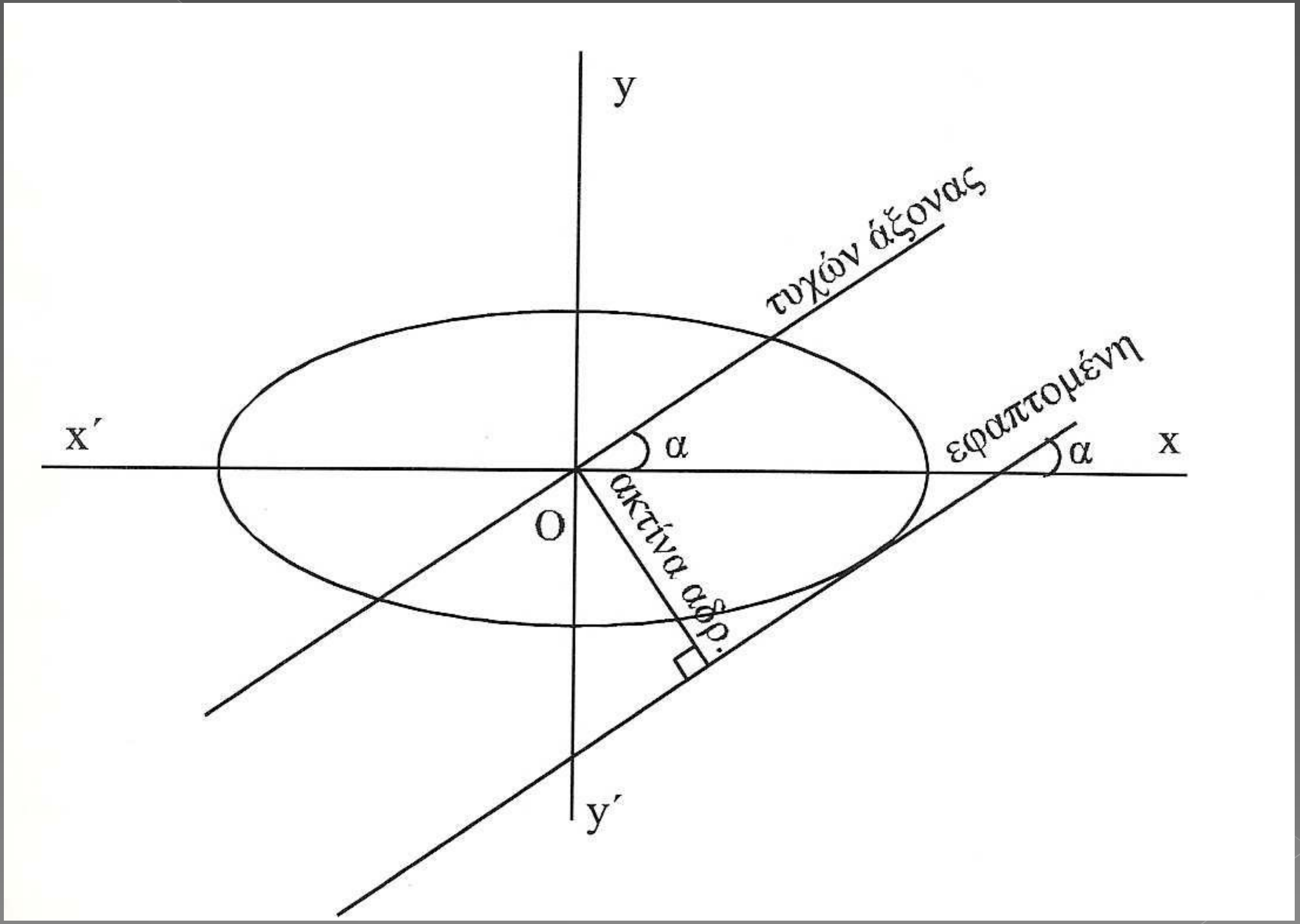
- Οι κεραίες που φέρουν συστήματα εκπομπής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην κορυφή τους είναι κατασκευασμένες από ¨μονόχωνα υπερβολοειδή¨.
- Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κεραία του σταθμού της Μόσχας στην τοποθεσία Σαμπόλοφκα , η οποία κατασκευάστηκε με σχέδιο του σοβιετικού και ακαδημαϊκού Β. Γ. Σούχωφ. Τα δε μονόχωνα υπερβολοειδή είναι ευθειογενείς επιφάνειες, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- (Βλ. : Α. Γ. Φελλούρη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα 2006, σελ. 177.*)

Οι αντισεισμικές κατασκευές

- Το **ελλειψοειδές αδρανείας ενός υλικού συστήματος ως προς σημείο Ο του σχήματος έχει** γενικά 3 άξονες συμμετρίας, τους οποίους ονομάζουμε **πρωτεύοντες άξονες αδρανείας του συστήματος ως προς Ο. Τα επίπεδα των αξόνων αυτών τα** ονομάζουμε **πρωτεύοντα επίπεδα αδρανείας του συστήματος ως προς Ο.**
- **Η μεγίστη ροπή αδρανείας του υλικού συστήματος ως προς άξονες διερχόμενους** δια του αυτού σημείου του, είναι η **ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς** το μικρό άξονα του ελλειψοειδούς αδρανείας του συστήματος ως προς αυτό το σημείο.
- Προφανώς η αντίστοιχη **ελαχίστη ροπή αδρανείας είναι η ροπή αδρανείας ως**

  προς το **μεγάλο άξονα του ελλειψοειδούς αδρανείας. Εάν, αντί για τυχόν** σημείο Ο λάβουμε το κέντρο βάρους Κ του υλικού συστήματος, τότε το ελλειψοειδές αδρανείας ονομάζεται **κεντρικό ελλειψοειδές αδρανείας του** συστήματος. (Διαβάστε τη συνέχεια στις Κωνικές Τομές, σελ. 83)

Οι αντισεισμικές κατασκευές

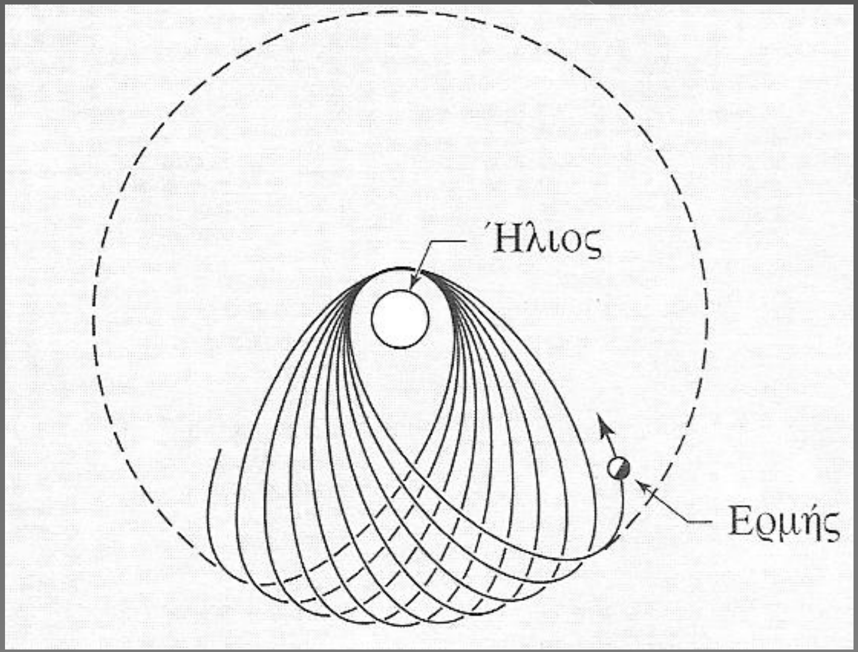


Χαλύβδινα υποστυλώματα

- Στις κατασκευές, για το σχεδιασμό υποστυλωμάτων χάλυβα κάτω από ένα κεντρικό φορτίο, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τύπους οι οποίοι ευρίσκονται στις προδιαγραφές του Αμερικάνικου Ινστιτούτου Κατασκευών Χάλυβα. Η παραβολική διατομή χρησιμοποιείται για να προβλέψει την επιτρεπόμενη τάση όταν πρόκειται για κοντά και μεσαίου μήκους υποστυλώματα από χάλυβα.

(Βλ. σε: American Institute of Steel Construction (AISC), *Manual of Steel Construction, ed. AISC*, [9]*New York 1989. Και σε:* F. P. Beer- E. R. Johnston, *Μηχανική των υλικών, μτφρ. Σ. Παπαργύρη*- Πέγιου, επιμέλεια μτφρ. Δ. Μπέσκου, εκδ. Τζιόλα, τόμ. II, [2]Αθήνα 1999, σελ. 818.)

Μετατόπιση περιήλιου



- Η μετατόπιση του περιηλίου του πλανήτη Ερμή εξηγείται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, το δε επίπεδο της τροχιάς που διαγράφει κατά τη μετατόπισή του θεωρούμε ότι συμπίπτει με το επίπεδο του φύλλου αυτού του χαρτιού. Χάριν ευκολίας η εκκεντρότητα της τροχιάς καθώς και η μετατόπιση ανά περιφορά, έχουν μεγεθυνθεί αρκετά. Αν δεν λάβουμε υπ' όψιν μας τη μετατόπιση, τότε η εικόνα είναι μια στάσιμη έλλειψη.

(Βλ. : C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, A. C. Helmholz, B. J. Moyer, *Μηχανική, μτφρ. διδακτικό προσωπικό τ. εργαστηρίου φυσικής του Ε.Μ.Π.*, επιμέλεια Γ. Βουδούρης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., τόμ. Ι, Αθήνα ^{2}1998, σελ. 436.)

Πυθμένες Δεξαμενών

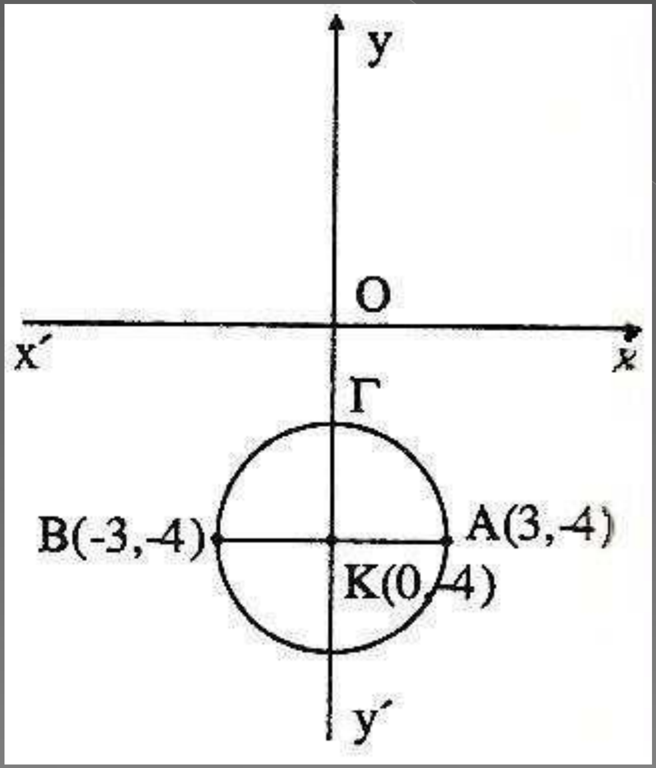
- Εάν στην κατασκευή τέτοιου είδους πυθμένων χρησιμοποιηθούν καμπύλες κωνικών τομών, τότε προσεγγίζεται το μέγεθος **μεμβρανική ένταση, το οποίο** επιδιώκεται, επειδή στο **δακτύλιο εδράσεως δεν πρέπει να μεταδίδονται** εφελκυστικές αλλά ούτε και θλιπτικές τάσεις. Στην περίπτωση δε της χρήσης κωνικών τομών έχει δειχθεί ότι η κάμψη εκτείνεται σε πολύ μικρές περιοχές.

(Βλ. σε: Ε. Κοκκινόπουλου, *Στατική, εκδ. ΤΕΕ, Αθήνα 1997)*

Οροφές κτιρίων-Τρούλοι

- Τα κυκλικά, ή κυλινδρικά σχήματα όταν χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των τρούλων, ή οροφών κτιρίων, χρειάζονται ενίσχυση στην κορυφή, ενώ στα παραβολικά αυτό δεν συμβαίνει, επειδή η λειτουργία σ' αυτήν την περίπτωση δεν είναι κελυφωτή αλλά τοξωτή, αφού το αντίστοιχο τόξο δίνει μηδενικό διάγραμμα ροπών (π.χ. σε χιόνι). Το Πλανητάριο στη Μόσχα αποτελεί παράδειγμα τέτοιας κατασκευής.
- ***Αυτή η εφαρμογή οδήγησε τη συγγραφική ομάδα του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Υπουργείου Παιδείας να διατυπώσει την εκφώνηση του εξής προβλήματος για τους μαθητές της Β΄ Λυκείου:***

Το πρόβλημα για τη Β΄ τάξη Λυκείου (1999)

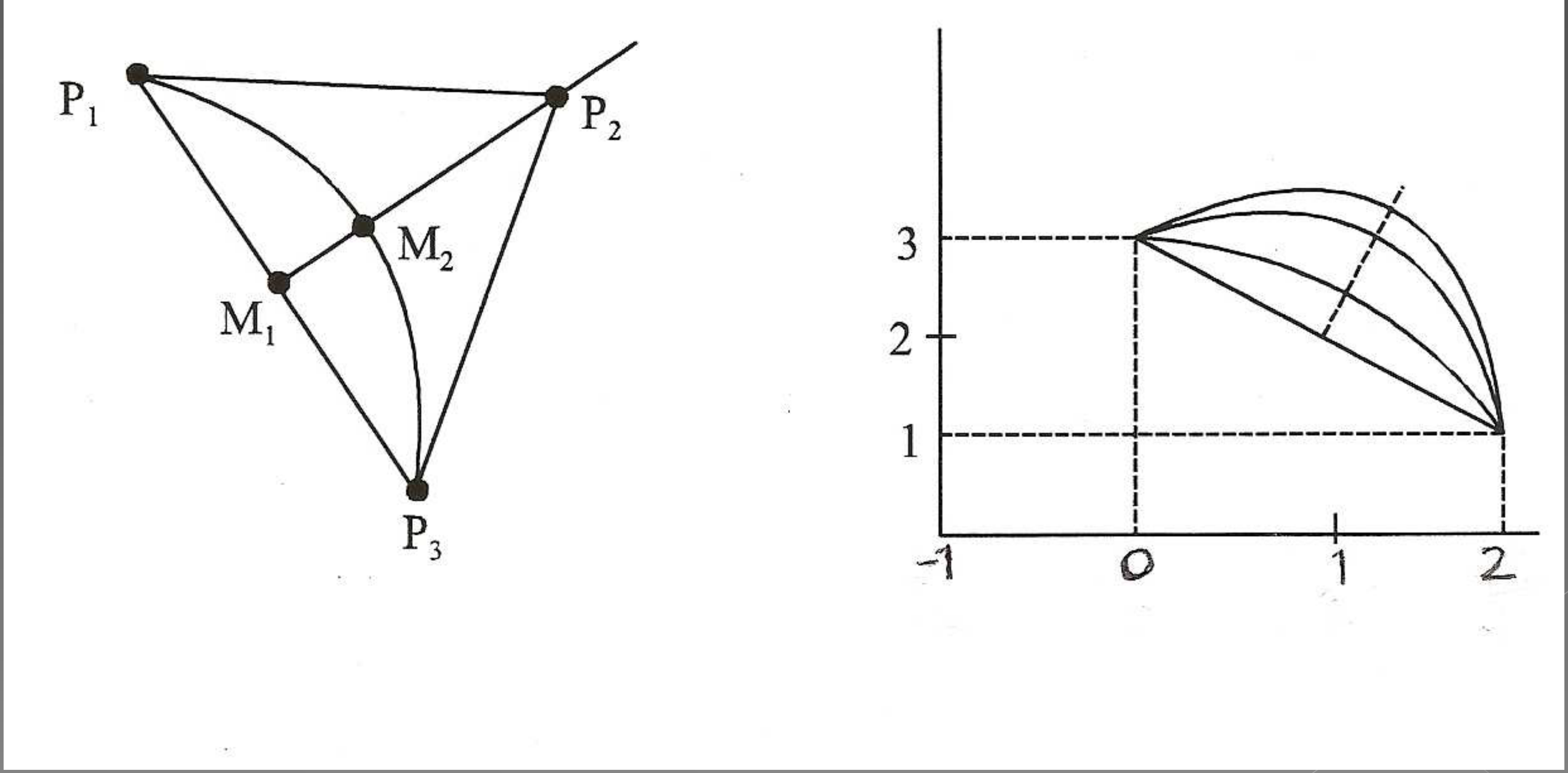


- ***Η κάθετη τομή του θόλου ενός πλανηταρίου είναι το ημικύκλιο ΒΓΑ όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο θόλος πρόκειται να αντικατασταθεί με άλλον του οποίου η αντίστοιχη διατομή να δίνει παραβολικό σχήμα με κορυφή το σημείο Ο(0,0), επειδή αυτό είναι πιο ανθεκτικό σε φορτία, όπως χιονιού κ.λπ. Να εξετάσετε αν η κατασκευή του καινούριου τρούλου θα καλύπτει από πάνω όλη την παλαιά.***
- (Βλ. στο Συλλογικό έργο: *Αξιολόγηση των μαθητών της Β΄ Λυκείου στα Μαθηματικά*, εκδ. Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας του Υ.Π.Ε.Π.Θ., τεύχος Γ΄, Αθήνα 1999, σελ. 204.)

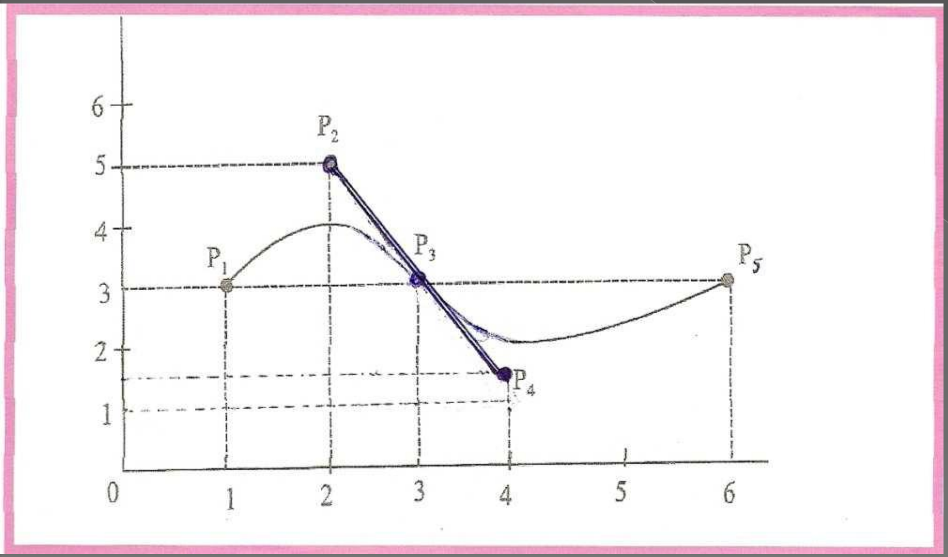
Σχεδιασμός μοντέλων αυτοκινήτων

- Στην αυτοκινητοβιομηχανία RENAULT ο P. Bezier ανέπτυξε σύστημα παραμετρικών εξισώσεων καμπύλων, με τη χρήση των οποίων οι σχεδιαστές σχεδιάζουν μοντέλα αυτοκινήτων χωρίς να έχουν απαραίτητα μαθηματικές γνώσεις. Η παραμετρική εξίσωση του τόξου μιας καμπύλης 2ου βαθμού που χρησιμοποιήθηκε από τον P. Bezier έχει τη μορφή:
- $\upsilon(t)=(1-t)^2\upsilon_1+\lambda t(1-t)\upsilon_2+t^2\upsilon_3$, $0\leq t\leq 1$ (**σχέση 1**), όπου υ_1 , υ_2 , υ_3 τα διανύσματα θέσης των P_1, P_2, και P_3 αντίστοιχα. Ο P. Bezier παρατήρησε ότι με τη μετατόπιση του P_2 επιτυγχάνεται αλλαγή του σχήματος της καμπύλης.
- (Βλ. σε: N. C. Harisson, *Parametric curves: Introduction to curve design, Teaching* Mathematics and Applications, vol. XII , n. 4, 1993, pp. 167-173.)

Στην αυτοκινητοβιομηχανία RENAULT



Στην αυτοκινητοβιομηχανία RENAULT



- Στην πράξη, για να σχεδιαστεί το αυτοκίνητο δεν χρησιμοποιείται μια και μόνο πολύπλοκη καμπύλη αλλά γίνεται συνδυασμός τμημάτων πολλών εξ αυτών.
- Αυτό επιτυγχάνεται με το ηλεκτρονικό καμπυλόγραμμο. Έτσι π.χ. λαμβάνοντας δύο διαδοχικά τόξα που προκύπτουν από τη **σχέση (I)** σχηματίζεται το διάγραμμα του σχήματος, όπου $P_1=(1,3)$, $P_2=(2,5)$, $P_3=(3,3)$, $P_4=(4,1.5)$, $P_5=(6,3)$. Διαβάστε τη συνέχεια σε: Κωνικές Τομές, σελ. 91