

# «ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

**Δρ. Ιωάννης Θ. Λαζαρίδης**

Σχολικός Σύμβουλος Π.Ε.  
Μέλος της Επιστημονικής Ένωσης για  
τη Διδακτική των Μαθηματικών (ΕΠΕΔΙΜ)

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΙΣΗΓΗΣΗΣ

### Θεωρητικό Πλαίσιο

Δύο, κατά τη διάρκεια της περασμένης εικοσαετίας, κύριες τάσεις έχουν επικρατήσει στην έρευνα της Εκπαίδευσης των Μαθηματικών.

Η πρώτη είναι ο **Κονστρουκτιβισμός (Constructivism)** που θεωρητικά ξεκίνησε και θεμελιώθηκε απ' την επιστημολογική επιχειρηματολογία του Von Glasersfeld (1984, 1987, 1989), σύμφωνα με τον οποίο, οι μαθητές ενεργά κατασκευάζουν τους δικούς τους μαθηματικούς τρόπους γνώσης, καθώς προσπαθούν να οργανώσουν τις προσωπικές τους εμπειρίες. Αποδείχθηκε εμπειρικά ότι ο κάθε μαθητής κατανοεί διαφορετικά τα μαθηματικά αντικείμενα μέσα σε κοινές διδακτικές δραστηριότητες. Από την κατασκευαστική θεωρία γνώσης (Κονστρουκτιβισμός) προκύπτει ότι η ουσιαστική μάθηση των Μαθηματικών είναι μια διαδικασία λύσης προβλημάτων (Thompson 1985, Glasersfeld 1987). Η χρήση των προβλημάτων, σαν μέσον για την ανάπτυξη των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών μας, τους δίνει την ευκαιρία να μάθουν Μαθηματικά, με τρόπο ανάλογο προς αυτόν που δείχνει η ιστορική εξέλιξη ότι επινοήθηκαν τα Μαθηματικά.

Η δεύτερη τάση δίνει έμφαση στην κοινωνική και πολιτιστική φύση της μαθηματικής δραστηριότητας και θεωρητικά εμπνεύστηκε απ' το έργο του Vygotsky (που εκδόθηκε μετά το 1970). Σύμφωνα μ' αυτήν, την **Κοινωνικοπολιτιστική Θεωρία**, η ανάπτυξη κι η μάθηση δεν είναι ατομική γνωστική αυτο-οργάνωση, αλλά πολιτιστική μύηση σε καθιερωμένες, εδραιωμένες πρακτικές. Η μαθηματική δραστηριότητα ενός ατόμου, επηρεάζεται βαθιά από τη συμμετοχή του σε περιρρέουσες πολιτιστικές δραστηριότητες, μέσα στις κοινωνικές ομάδες που ανήκει (οικογένεια, φίλους, σχολείο κ.α.).

Η σύνθεση και ο συντονισμός των ανωτέρω προσεγγίσεων σε μια κοινή θεωρία με το όνομα **«Κοινωνικός Κονστρουκτιβισμός»** (P.Cobb) είναι και το επικρατέστερο διδακτικά μοντέλο, που αναδεικνύεται στη σύγχρονη προσπάθεια αναμόρφωσης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης ως ο πρωταγωνιστής.

### Σύντομη περιγραφή της διδακτικής πράξης (Ροή του μαθήματος).

Ξεκινώντας το νέο μάθημα οι μαθητές ανοίγουν τα βιβλία τους και:

- Ρίχνουν μια σύντομη ματιά στους στόχους.
- Προχωρούν στην αντιμετώπιση των δραστηριοτήτων που υπάρχουν στο βιβλίο.
- Τα συμπεράσματα των μαθητών αναδύονται, παρουσιάζονται και συζητούνται στην τάξη.
- Με την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων ο δάσκαλος επισημαίνει τη νέα μαθηματική γνώση, «ενοποιώντας» τις απόψεις και τα συμπεράσματα των μαθητών, «ανακεφαλαιώνοντας» και «επισημοποιώντας» τις γνώσεις που αποκτήθηκαν.
- Η συστηματοποιημένη μαθηματική γνώση στο βιβλίο είναι σαφώς διακριτή σε ειδική έγχρωμη στήλη και συνοδεύεται από αντίστοιχα παραδείγματα.
- Η ολοκλήρωση προϋποθέτει τη μελέτη δύο υποδειγματικά λυμένων προβλημάτων εφαρμογής της νέας γνώσης, με σκοπό την κατανόηση της μεθοδολογίας που ακολουθείται στη λύση προβλημάτων της καθημερινής ζωής σχετικών με τη νέα γνώση.
- Στη συνέχεια αφού οι μαθητές ολοκληρώσουν το μάθημα αντιμετωπίζουν τις «ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση».

- Τέλος ξαναρίχνουν μια σύντομη ματιά στους στόχους που αναγράφονται στην αρχή του μαθήματος.

### **Πρόβλημα.**

Τα παιδιά καλούνται:

- ν' αποκωδικοποιήσουν, ν' αξιολογήσουν και ν' αξιοποιήσουν πληροφορίες που δίνονται από διαφορετικές πηγές (εικόνα, κείμενο, πίνακα, διάγραμμα),
- να εφαρμόσουν στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, όπως η οργάνωση των δεδομένων,
- να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα, είτε με δεδομένους αριθμούς είτε με δεδομένη απάντηση είτε συμπληρώνοντας ερωτήματα σ' ένα κείμενο,
- να χρησιμοποιούν την εκτίμηση για να προβλέψουν τα αποτελέσματα,
- να χρησιμοποιούν εναλλακτικές στρατηγικές υπολογισμού,
- να επεξεργάζονται προβλήματα με περισσότερες από μία λύσεις ή προβλήματα χωρίς αριθμούς,
- να εκτελούν τις πράξεις.

### **Η συγκρότηση μαθηματικών δομών κατά τον J. Bruner:**

Πραξιακή αναπαράσταση: το παιδί μαθαίνει μέσα από τη δράση, τη μίμηση και το χειρισμό των αντικειμένων.

Εικονιστική αναπαράσταση: η αναπαράσταση του εξωτερικού κόσμου μέσω εσωτερικών πνευματικών εικόνων. Δεν υπάρχει όμως πλήρης διαχωρισμός ανάμεσα στο εξωτερικό αντικείμενο και στο αντίστοιχο εσωτερικό σύμβολο.

Συμβολική αναπαράσταση: το παιδί αναπαριστά την εξωτερική πραγματικότητα με αφηρημένα σύμβολα.

Η μετάβαση από τα πραγματικά αντικείμενα στους αριθμούς απαιτεί μια νοητική εξέλιξη που χωρίς αυτή το αριθμητικό σύμβολο είναι ασήμαντο. Η ακολουθία της απαρίθμησης είναι μηχανιστική διαδικασία και αποτελεί βασική εννοιολογική ιδέα έδρασης άλλων αριθμητικών εννοιών.

### **Αρχές και φιλοσοφία των Αναλυτικών Προγραμμάτων των Μαθηματικών.**

Ιδιαίτερη έμφαση δίδεται στη δραστηριότητα και στη διαδικασία της μαθηματοποίησης (mathematization), η οποία χαρακτηρίζεται από πέντε αξιώματα:

- Η μάθηση είναι μια (ανα)κατασκευαστική δραστηριότητα, που προκαλείται από την «πραγματικότητα».
- Η μάθηση είναι μακροχρόνια διαδικασία, που κινείται από το συγκεκριμένο, στο εικονικό, στο αφηρημένο.
- Η μάθηση υποβοηθείται από το συλλογισμό στη διαδικασία σκέψης των ιδίων ατόμων και των άλλων.
- Η μάθηση είναι πάντοτε ενσωματωμένη σε ένα κοινωνικό-πολιτισμικό πλαίσιο.
- Η μάθηση είναι η κατασκευή της γνώσης και των δεξιοτήτων σε μια δομημένη οντότητα.

**Συγκρότηση της γνώσης** με προσωπική συμμετοχή και οργάνωση των εμπειριών:

**Ο μαθητής** αναλαμβάνει πρωτοβουλίες, γίνεται ερευνητής, ανταλλάσσει γνώμες με τους συμμαθητές του, συζητά τρόπους αντιμετώπισης των προβλημάτων, δοκιμάζει ιδέες, ελέγχει τα συμπεράσματά του και τεκμηριώνει την ορθότητά τους στην τάξη.

**Το βιβλίο** οργανώνει τη δραστηριότητα του μαθητή: Με προτεινόμενες δραστηριότητες. Με μορφοποίηση της γνώσης και συνοδεία παραδειγμάτων. Με εφαρμογές και υποδειγματικές λύσεις. Με ανακεφαλαίωση που περιλαμβάνει ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση.

Βασικός σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο είναι η απόκτηση μαθηματικής σκέψης και η καλλιέργεια του **μαθηματικού εγγραμματοςμού**, της ικανότητας δηλαδή του μαθητή να εφαρμόζει μαθηματικές γνώσεις, μεθόδους και διαδικασίες σε προβλήματα της καθημερινής ζωής. Η συμβολή των Μαθηματικών έγκειται στο γεγονός ότι, πέραν της χρησιμότητάς τους στην καθημερινή ζωή, οι διαδικασίες επαγωγικών, απαγωγικών και αναλυτικών

συλλογισμών που καλλιεργεί η μαθηματική εκπαίδευση ασκούν το μαθητή στη μεθοδική σκέψη και τη λογική τεκμηρίωση, την ανάλυση, τη σύνθεση, την αφαίρεση, τη γενίκευση, την κριτική σκέψη και τη δημιουργική φαντασία, μέσα από την επινόηση εναλλακτικών στρατηγικών δράσης κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης παίζουν τα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα και άδηλα πρότυπα επίλυσης προβλημάτων.

**Εποικοδομητικό μοντέλο διδασκαλίας:** Μέσα από δραστηριότητες και προβληματικές καταστάσεις ανοιχτές ή κλειστές, παρμένες από τη ζωή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών, το παιδί με τη συνεργασία των μελών της ομάδας του και την φθίνουσα καθοδήγηση του δασκάλου αναπτύσσει γνωστικές συγκρούσεις, αναδομεί τις ιδέες του και οικοδομεί τις βασικές μαθηματικές γνώσεις (Δ.Ε.Π.Π.Σ. Μαθηματικών 1997).

**Μαθηματικές έννοιες:** Η μάθηση μιας μαθηματικής έννοιας είναι μια διαδικασία μακρόχρονη και κινείται από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Σύμφωνα με τη διαδικασία αυτή, ανακαλύπτουμε κοινές ιδιότητες σε διαφορετικού είδους εμπειρίες. Η νοητική αναπαράσταση μιας κοινής ιδιότητας είναι αυτό που ονομάζουμε έννοια. Η παροχή συγκεκριμένου υλικού, μοντέλων, σχημάτων, διαγραμμάτων, συμβόλων βοηθά να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου (Πλαισίωση – Αποπλαισίωση).

Σύμφωνα με τις γενικές αρχές της διδασκαλίας των Μαθηματικών, τα παιδαγωγικά μοντέλα που ενισχύουν την κατασκευή της γνώσης έχουν ως κύρια χαρακτηριστικά:

- Την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και μαθητριών στη μαθησιακή διαδικασία.
- Την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες που απαιτούν συνεργασία.
- Τη δημιουργική απασχόλησή τους σε καταστάσεις που διευκολύνουν την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και επιτρέπουν τη συζήτηση μεταξύ των μελών της ομάδας.

**Νοεροί υπολογισμοί:** Στα βιβλία των μαθηματικών υποστηρίζονται συστηματικά οι νοεροί υπολογισμοί. Πέρα από την πρακτική χρησιμότητά τους σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, οι νοεροί υπολογισμοί δίνουν στα παιδιά τη δυνατότητα να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς και κάποιες ιδιότητές τους. Ο δάσκαλος κατά τη διδασκαλία των νοερών υπολογισμών ζητάει από τους μαθητές να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίο υπολόγισαν το αποτέλεσμα. Το να εξηγεί ο μαθητής τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζει είναι μια πολύ χρήσιμη διανοητική ενέργεια (μεταγνωστική διαδικασία). Επίσης, ο δάσκαλος δίνει τη δυνατότητα να εκφραστούν, να συζητηθούν και να καταγραφούν όλοι οι δυνατοί τρόποι υπολογισμού μιας πράξης.

**Ανάδειξη και αξιοποίηση του λάθους.** Στόχοι:

- α) να δημιουργείται ένα πλαίσιο που επιτρέπει την εξωτερίκευση παρανοήσεων, έτσι ώστε να αποτελέσουν αντικείμενο επεξεργασίας μέσα στην τάξη,
- β) να έρχονται τα παιδιά στη θέση να αξιολογήσουν κριτικά απόψεις και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους με μία εξήγηση και
- γ) να απενοχοποιηθεί το λάθος και να περάσει στα παιδιά το μήνυμα ότι το λάθος στην πορεία της μάθησης είναι αναμενόμενο και όχι κατακριτέο.

Σε μια σύγχρονη τάξη μαθηματικών ο δάσκαλος:

Ενθαρρύνει τους μαθητές να δραστηριοποιηθούν, επισημοποιεί τη νέα γνώση. Εστιάζει στην ανατροπή του παθητικού ρόλου του μαθητή και δεν είναι πια ο αποκλειστικός φορέας της γνώσης, αλλά ο οργανωτής του πλαισίου ανάπτυξης, ο σύμβουλος και εμψυχωτής των μαθητών.

**Η οργάνωση της τάξης:** Η μαθηματική τάξη είναι πλέον ένα ανοικτό διδακτικό περιβάλλον με συνεχή εναλλαγή ατομικού – ομαδικού – μετωπικού μοντέλου οργάνωσης. Το μαθηματικό περιεχόμενο προσεγγίζεται μέσα από μια ποικιλία καταστάσεων και εφαρμογών (σύνδεση με τις άλλες επιστήμες, την τεχνολογία, τον πολιτισμό και τα κοινωνικά ζητήματα). Οι δραστηριότητες διαπραγματεύονται από τους ίδιους τους μαθητές αξιοποιώντας ομαδοσυνεργατικές μεθόδους διδασκαλίας.

**Οι ομαδοσυνεργατικές εργασίες:** αμβλύνουν το παθογόνο άγχος των μαθητών, δίνουν την ευκαιρία να αποστασιοποιηθούν από το δικό τους τρόπο σκέψης - τη δική τους γνωστική

στρατηγική, οι μαθητές επισημαίνουν διαφορές και ομοιότητες, αξιολογούν, επιχειρηματολογούν, ελέγχουν, κρίνουν αντικειμενικά και συμπεραίνουν.

**Ο φάκελος εργασιών των μαθητών:** Οι μαθητές παρέχουν πληροφορίες σχετικά με το βαθμό κατανόησης και την απόκτηση των δεξιοτήτων. Ο δάσκαλος καταγράφει σε αρχείο, ώστε με συστηματικό τρόπο να μελετώνται οι αλλαγές που συντελούνται στην πρόοδο κάθε μαθητή, αλλά και στην τάξη ολόκληρη. Η καταγραφή μπορεί να γίνει ηλεκτρονικά ή να κρατά ο δάσκαλος φάκελο με τις εργασίες κάθε μαθητή. Στο φάκελο συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του κάθε μαθητή καθώς και οι εργασίες του για ένα χρονικό διάστημα ή μπορεί ακόμη να περιέχει υλικό που κατασκεύασε ο μαθητής ή φωτογραφίες από δραστηριότητες.

**Η αξιολόγηση** για όλα τα μαθήματα αλλά και τα Μαθηματικά διακρίνεται σε: Αρχική – διαπιστωτική, Διαμορφωτική – διαρκής, Τελική – ανακεφαλαιωτική.

### **Ενδεικτική Βιβλιογραφία:**

- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23, 13-20.
- Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (Δ.Ε.Π.Π.Σ.), Τόμος Α' (2003). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ & Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.
- Καφούση, Σ. (1994). Το Λάθος στη Μάθηση και Διδασκαλία των Αριθμητικών Πράξεων, Ευκλείδης Γ', Τόμος 11, Τεύχος 39, Ε.Μ.Ε. Αθήνα.
- Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών. Αθήνα: Leader Books.
- Λαζαρίδης, Ι. (2005). Διερεύνηση απόψεων και πρακτικών ενός δασκάλου σε διαθεματικές προσεγγίσεις με βάση τα μαθηματικά. Πρακτικά 1ου Συνεδρίου ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ., Αθήνα, Ελληνικά Γράμματα.
- Λαζαρίδης, Ι. (2007). Τελικά τα μαθηματικά διδάσκονται ως ανθρώπινη δραστηριότητα; Μια μεταφορά - παραβολή μεταξύ διαδικασιών διερεύνησης συνταγών και μαθηματικών προβλημάτων. Πρακτικά 2ου Συνεδρίου ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ., Αθήνα, Εκδόσεις Τυπωθήτω - Γ.Δάρδανος.
- Λαζαρίδης, Ι. (2009). Εξέλιξη των απόψεων και πρακτικών μιας δασκάλας σε διαθεματικές προσεγγίσεις με βάση τα μαθηματικά. Πρακτικά 3ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝΕΔΙΜ), Ρόδος, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
- Λαζαρίδης, Ι. & Τριανταφυλλίδης, Τρ. (2010). Διδακτικές πρακτικές δυο δασκάλων σε διαθεματικές προσεγγίσεις με βάση τα μαθηματικά και στοιχεία φυσικής. Δ. Χασάπης (Επιμ.). 8ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, ΓΕΑΠΗ Αθήνα, Ηλεκτρονική Έκδοση.
- Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια Νέα Πρόταση Διδασκαλίας των Μαθηματικών στις Πρώτες Τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Αθήνα: Πατάκης.
- Μπούφη, Α. (1995). Μια προσπάθεια αλλαγής του παραδοσιακού τρόπου διδ/λίας των Μαθηματικών στο Δημ. Σχολείο, Μαθηματική επιθεώρηση 43, Ε.Μ.Ε. Αθήνα.
- Μπούφη, Α. (1996). Ο ρόλος των εποπτικών μέσων και άλλων συμβολικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών του δημοτικού σχολείου. *Εκπαιδευτικά*. τ.41-42.
- Streefland, I., Εισαγωγή – Επιμέλεια: Κολέζα, Ε. (2000). *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, εκδ. Leader Books, Αθήνα.
- Τύπας, Γ. (2005). Τα νέα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης: το πλαίσιο δημιουργίας και τα ειδικά χαρακτηριστικά τους. Πρακτικά Συνεδρίου του Π.Ι. σε συνεργασία με το Παν/μιο Θεσ/νίκης, Θεσσαλονίκη.
- Van de Walle, J. (2005). Επιμέλεια: Τρ.Τριανταφυλλίδης. *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική διδασκαλία*. Αθήνα: Τυπωθήτω – Γ. Δάρδανος.
- Von Glasersfeld, E. (1984). *An introduction to radical constructivism*. NY: Norton.
- Vygotskij, L. (1996). *Cultuur en Ontwikkeling [Culture and Development]*. Amsterdam: Boom.